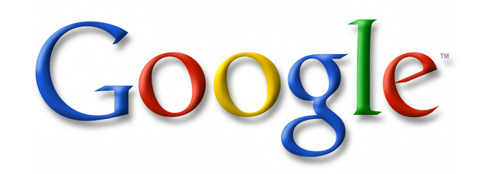








J. L. Raabe

Differenzial- und Integralrechnung.

I

Die

Differenzial- und Integralrechnung

mit

Functionen einer Variabeln.

Von

J. L. Raabe

Professor.

Der Differenzial- und Integralrechnung erster Theil.

Zürich,

bei Orell, Füßli und Compagnie.

1839.

Die

Differenzial- und Integralrechnung

mit

Functionen einer Variabeln.

Von

J. L. Raabe

Professor.

Der Differenzial- und Integralrechnung erster Theil.

Zürich,

bei Orell, Füßli und Compagnie.

1839.

Uebersichtliche Darstellung des Inhaltes.

Im vorliegenden ersten Bande der Differenzial- und Integralrechnung sind bloß die Functionen einer allgemeinen Größe diesem Calcul unterzogen worden; an den verschiedenen Orten, wo zwei und mehrere allgemeine Größen zugleich auftraten, ward jedesmal der zuerst erwähnte Fall herzustellen gesucht, um alsdann die Ergebnisse des Differenzial- und Integralcalculs, die für Functionen einer allgemeinen Größe bereits gewonnen wurden, auf jene Fälle anwenden zu können. Ferner war es dem Verfasser bei der Ausarbeitung dieses Bandes vorzüglich um die Integralrechnung zu thun; deswegen ist auch von der Differenzialrechnung nur so viel mitgetheilt worden, als zum Verständnisse der Integralrechnung nothwendig erachtet wurde.

Die Differenzialrechnung
(in zwei Kapiteln zerfällt).

Gleich am Eingange des ersten Kapitels ist das Amper'sche Fundamentaltheorem der gesammten Differenzial- und Integralrechnung mitgetheilt und begründet worden. Dasselbe drückt die wichtigste Eigenschaft der continuirlichen Function einer allgemeinen Größe aus und lautet, wie folgt: „Wenn in einer continuirlichen Function, im Bereiche ihrer Continuität, die allgemeine Größe x eine unendlich kleinwerdende Aenderung erleidet, so bietet (die Function $Ax+B$ ausgenommen, wo A und B von x unabhängig sind), die Aenderung der Function durch die Aenderung der allgemeinen Größe getheilt, zum Quotienten eine neue Function von x dar.” Diese neugewonnene Function, die unter der Benennung abgeleitete Function, Dif-

ferenzialquotient oder Differenzialcoefficient auftritt, ward dann für die algebraischen und exponentiellen Functionen abgeleitet, und zur jedesmaligen Erzeugung derselben für andere Functionen sind einige allgemeine Gleichungen aufgestellt worden.

Das zweite Kapitel enthält einige Anwendungen der Differenzialquotienten. Dieselben umfassen im:

§. I. Die Reihen von Taylor und Maklaurin sammt deren Ergänzungen, und im

§. II. a) Die Ausmittelung der Werthe der Functionen, die für besondere Werthe der allgemeinen Größe in $\frac{0}{0}$ übergehen; b) die Angabe jener Werthe der allgemeinen Größe einer Function, die dieser Function Maximum- oder Minimumwerthe beilegen.

Die Integralrechnung
(in vier Kapiteln zerfällt).

Im ersten Kapitel wurde, außer der Feststellung der Bedeutung und Bezeichnung eines unbestimmten sowohl, als eines bestimmten Integralausdruckes, auch der Zusammenhang des bestimmten Integrals mit einer Summe von Größen festgestellt, die sämmtlich in der zu integrirenden Differenzialformel oder Differenzialfunction ihren Ursprung haben; zugleich ist daselbst ein allgemeines Kriterium angegeben, aus der vorgelegten Differenzialformel jedesmal das Statt- oder Nichtstatthaben dieses Zusammenhanges zu erkennen.

Das zweite Kapitel ist ausschließlich dem Aufsuchen unbestimmter Integralfunctionen, die vorgelegten Differenzialformeln entsprechen, gewidmet; und zwar nach den verschiedenen, üblichen Integrationsmethoden. Jede dieser Methoden ist besonders herausgehoben, erläutert und mit Anwendungen versehen worden; wobei nicht nur der Einübung dieser Methoden, sondern ganz vorzüglich einer systematischen Entwickelung und Zusammenstellung der wichtigsten algebraischen und exponentiellen Integralfunctionen Rechnung getragen wurde. Dieses Kapitel zerfällt in sieben Paragraphen folgenden Inhaltes:

§. I. Derselbe enthält die Fundamentalgleichungen beim Integriren von Differenzialformeln überhaupt, und der algebraischen und exponentiellen Differenzialfunctionen im Besondern.

§. II. Das Integriren nach der Ableitungsmethode. — Das Verfahren, aus einer, in Bezug auf eine Buchstabengröße identischen Gleichung, kraft dieser Identität, neue Folgerungen zu ziehen, tritt hier unter der Benennung „Ableitungsmethode" auf. Dieses Verfahren ist sonach nichts anders, als das analytische oder fortentwickelnde. Im Gegensatze mit demselben steht das syntetische oder das zurückführende, das in den §. §. III, IV und V des vorliegenden Kapitels beim Integriren zur Anwendung gebracht wurde.

§. III. Das Integriren nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution. — Die hier zur Ausübung gebrachte Methode steht im genauesten Gegensatze mit der des vorangehenden Paragraphen.

§. IV. Das Integriren nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Recursion. — Das Characteristische dieser Methode besteht darin, eine vorgelegte Integralformel als allgemeines Glied einer Reihe anzusehen, und, wie solches bisweilen in der Lehre der Reihen mit Erfolg ausgeübt wird, durch Angabe einer Recursionsgleichung unter den Gliedern zur Kenntniß des allgemeinen Gliedes zu gelangen.

§. V. Das Integriren nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege des Zerlegens. — Dieselbe besteht darin, die zu integrirende Differenzialformel, falls deren Integralfunction nicht so leicht erhältlich ist, in eine algebraische Summe von Differenzialformeln dergestalt aufzulösen oder zu zerfällen, daß jede derselben als integrirbar erkannt werde.

§. VI. Das Integriren nach der Ableitungsmethode, mittelst Differenziation oder Integration nach einer allgemeinen Größe. — Wie oben bei §. II. bemerkt wurde, kann man aus einer Gleichung, die einen Integralwerth darstellt und eine allgemeine Größe enthält, diese allgemeine Größe zur Erzeugung

neuer Gleichungen benützen, und so die Werthe neuer Integralausdrücke gewinnen. Im vorliegenden §. wird diese allgemeine Größe unabhängig von der Variabeln der Integration vorausgesetzt, und den Operationen des Differenzirens und Integrirens unterzogen.

§. VII. Um die in größeren Werken über Integralrechnung enthaltenen Integralformeln hier nicht zu missen, ist abwechselnd nach der einen und der andern Methode der fünf vorangeschickten Paragraphen das dort Versäumte hier nachzuholen gesucht worden. Aus dem dieser übersichtlichen Darstellung nachfolgenden Inhaltsverzeichnisse läßt sich dieser Paragraph am besten und schnellsten übersehen.

Das dritte Kapitel, das von der Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien durch geschlossene algebraische und exponentielle Functionen handelt, zerfällt in fünf Paragraphen folgenden Inhaltes:

§. I. Das bestimmte Integrale zwischen den Grenzen a und b der Differenzialformel $\varphi(x)dx$, oder der Ausdruck $\int_a^b \varphi(x)dx$ wird, wenn F(x) die unbestimmte Integralfunction dieser Differenzialformel ist, entweder durch $F(b) - F(a)$, oder durch eine Summe von Größen dargestellt, die aus $\varphi(x)dx$ entstehen, wenn man in $\varphi(x)$ für die allgemeine Größe x alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ und für dx eine unendlich kleinwerdende Constante ω setzt, welche Constante den Unterschied zweier Nachbarswerthe von x, beim Uebergange von $x = a$ bis $x = b$ vorstellt. — Die Uebereinstimmung dieser beiden Resultate ist aber entweder an die Bedingung der Continuität der unbestimmten Integralfunction F(x) innerhalb derselben Grenzwerthe a und b von x gebunden, oder, in den Fällen wenn F(x) nicht angebbar ist, an die Bedingung geknüpft, daß $\varphi(x)\omega$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ unendlich kleinwerdend verbleibe. Gleich am Eingange dieses Paragraphen sind fünf bestimmte Integralien vorgeführt worden, von denen die

drei ersten der einen oder der andern dieser gleichbedeutenden Bedingungen entsprechen, die beiden letzten aber denselben nicht nachkommen. Alle bestimmte Integralien nun, die zu denen der letztern Art gehören, sind im ganzen Verlaufe dieses Bandes von aller und jeder Untersuchung ausgeschlossen worden.

Für Integralien, die einer der eben erwähnten Bedingungen nachkommen, bleibt noch, zumal dann, wenn deren unbestimmte Integralfunctionen nicht darstellbar sind, die Beantwortung der Frage wünschenswerth: ob dieselben endliche oder unendlichgroßwerdende Werthe darbieten. Denn wenn diese Frage bejahend in letzterem Sinne, und zwar apriori entschieden werden kann, ist man alsdann auch jeder weitern, bisweilen höchst beschwerlichen Bestimmung eines solchen Integrals überhoben. Zu diesem Zwecke sind hier, in einer systematischen Reihenfolge von Sätzen, Kennzeichen der Convergenz und Divergenz bestimmter Integralien angegeben worden.

Der erste dieser Sätze lautet: Wenn die Integrationsgrenzen a und b endliche Größen sind, oder wenn b — a eine endliche Größe vorstellt, alsdann ist das bestimmte Integrale jedesmal convergent. Die übrigen Sätze beschäftigen sich mit dem Falle wenn b — a unendlich großwerdend ist. Solche Integralien können convergent oder divergent sein, je nachdem gewisse ohne Ende fortlaufende Reihen zu den convergenten oder divergenten gehören. Dieser Umstand sowohl, als auch der, die Brauchbarkeit der bestimmten Integralien in anderen Partieen der Analyse zu zeigen, machte es nothwendig einige Sätze über Convergenz und Divergenz von ohne Ende fortlaufende Reihen einzuschalten.

Der Schluß dieses Paragraphen enthält eine Anwendung der gewonnenen Sätze auf das bestimmte Integrale $\int_a^\infty \varphi(x)dx$, betreffend die Convergenz und Divergenz desselben, wenn $\varphi(x)$ eine algebraisch rationale Function von x bedeutet, und die Ausscheidung der Fälle der Convergenz von denen der Di-

vergenz einer ohne Ende fortlaufenden Reihe, deren zwei aufeinander folgende Glieder u_k und u_{k+1} die Relation:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k^p + E_1 k^{p-1} + E_2 k^{p-2} + \ldots}{k^p + e_1 k^{p-1} + e_2 k^{p-2} + \ldots}$$

eingehen, wo E_1, E_2, ... und e_1, e_2, ... beliebige, reelle und von k unabhängige Zahlenwerthe vorstellen.

§. II. Dieser Paragraph hat zum Gegenstande die Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien, gefolgert aus den unbestimmten Integralfunctionen derselben.

Der gleich in den ersten Nrn. dieses Paragraphen erörterte Gegenstand betrifft den Fall, wenn die unbestimmte Integralfunction, bedingt durch die Form der Function, für einen und denselben Werth der allgemeinen Größe mehrere, um endliche Differenzen abweichende Werthe annimmt. Wenn man nämlich $\int \varphi(x)dx = F(x)$, also $\int_a^b \varphi(x)dx = F(b) - F(a)$ hat, und die Function F(x) ist der Art, daß sie für einen einzigen und völlig bestimmten Werth von x mehrere, ungleich große Werthe darbieten kann, so entsteht die ganz natürliche Frage: in welchem Sinne der Vieldeutigkeit soll in der letzten Gleichung F(b) und in welchem F(a) genommen werden, damit der Unterschied F(b)—F(a) denselben Werth darbiethe, als die aus $\varphi(x)dx$ von $x = a$ bis $x = b$ entspringende Gliedersumme? — Nach einer gründlichen Erörterung dieses Gegenstandes, die in gedrängter Zusammenstellung hier nachfolgt, ist diese Frage dahin entschieden worden, daß F(b) sowohl als F(a) in gleichem Sinne der Vieldeutigkeit zu nehmen sind. Jede vieldeutige Function von x, wie F(x), kann durch Einführung einer oder mehrerer willkührlichen und von x unabhängigen Größen, wie r, r', r'', ... deren Gesammtheit durch eine einzige Größe ρ zusammengefaßt angedeutet wurde, ersetzt werden; so daß man statt der vieldeutigen Function F(x) etwa $\psi[\rho, F(x)]$ setzen kann, wo F(x) nunmehr als eindeutige Function auftritt,

und die willkührliche Größe ρ, vereint mit der Function ψ alle Vieldeutigkeiten der vorgelegten $F(x)$ darbieten. Diese Function $\psi[\rho, F(x)]$ ist der Kürze wegen durch $f(\rho, x)$ vorgestellt worden. Wenn nun im letzteren Ausdrucke für ρ der Reihe nach die Werthe $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_k, \ldots$ eingesetzt werden, so sollen die Ausdrücke $f(\rho_1, x), f(\rho_2, x), f(\rho_3, x), \ldots f(\rho_k, x) \ldots$, wenn in denselben für x ein bestimmter Werth angenommen wird, alle Werthe erzeugen, die die Function $F(x)$ vermöge ihrer Vieldeutigkeit, für denselben Werth von x darbieten kann. Daß diese, den verschiedenen Werthen ρ entsprechenden Werthe von $f(\rho, x)$, für denselben Werth von x sämmtlich ungleich große Werthe annehmen, folgt aus dem gegebenen Begriffe einer vieldeutigen Function. — Hat man sonach die Gleichung $\int \varphi(x)dx = F(x)$, und stellt $F(x)$ eine vieldeutige Function von x vor, so ersetze man dieselbe zuerst durch $f(\rho, x)$; das Differenziale dieses Ausdruckes nach x setze man statt $\varphi(x)dx$, und da dieses Differenziale im Allgemeinen auch die neu eingeführte Größe enthalten wird, so stelle man dasselbe durch $f_1(\rho, x)dx$ dar; integrirt man nun von $x = a$ bis $x = b$, so hat man $\int_a^b f_1(\rho, x)dx = f(\rho, b) - f(\rho, a)$; und wenn ρ_g einen der Werthe, deren ρ fähig ist, vorstellt, so lautet die Antwort der obigen Frage wie folgt: Dieselbe Größe ρ_g muß in allen Gliedern der letzten Gleichung statt ρ eingesetzt werden, nämlich man hat: $\int_a^b f_1(\rho_g, x)dx = f(\rho_g, b) - f(\rho_g, a)$. Zu diesem Ergebnisse führen die zwei Sätze in den Nrn. 132 und 133.

Die folgenden Nrn. dieses Paragraphen enthalten einige Anwendungen dieses Ergebnisses und die Werthe einiger bestimmten Integralausdrücke, gefolgert aus den denselben entsprechenden unbestimmten Integralfunctionen.

§. III. Die Integrationsmethoden der Ableitung und des Zurückführens auf dem Wege der Substitution sowohl, als der Recursion, wie solche im zweiten Kapitel gebraucht wurden,

sind hier, sammt den nöthigen Modificationen, die von den Integrationsgrenzen herrühren, entwickelt und auf die Herstellung verschiedener bestimmten Integralien angewandt worden.

Mehrere in diesem Paragraphen gewonnene Resultate stützen sich auf die Grenzgleichung Lim: $e^{z\sqrt{-1}} = 0$, wo das Grenzzeichen auf das unbestimmte und unendliche Zunehmen von z bezogen ist; aus dieser Grenzgleichung fließen auch, wenn man $e^{z\sqrt{-1}} = f(z) + \sqrt{-1}\,F(z)$ setzt, die Grenzgleichungen Lim: $f(z) = 0$ und Lim: $F(z) = 0$. — Zur Hebung jedes Mißverständnisses, die die beiden letzten Grenzgleichungen erzeugen können, diene Folgendes: Die trigonometrischen Größen, die unter den Benennungen Cosinus und Sinus bekannt sind, können auch durch die Functionen, die hier durch f und F angedeutet wurden, ausgedrückt oder gemessen werden, und zwar für unendlich kleinwerdende und endliche Werthe der allgemeinen Größe z, keineswegs aber für unendlich großwerdende Werthe von z; denn beim zuletzt erwähnten Zustande der allgemeinen Größe, nehmen erstere oder die trigonometrischen Größen, die ihren Ursprung im Kreise haben, unbestimmte Werthe an, während letztere, hier durch f(z) und F(z) dargestellte Functionen von z oder die ohne Ende fortlaufenden Reihen:

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots, \qquad z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

wie aus der Beweisführung Nr. 151 hervorgeht, unendlich kleinwerdende Grenzwerthe darbieten. — Wenn also in der eben erwähnten Nr., wie die Gleichungen (II) daselbst zeigen, die Grenzgleichungen Lim: Cos. z = 0 und Lim: Sin. z = 0 vorkommen, so treten diese Größen oder Functionen Cos. z und Sin. z nicht als trigonometrische Größen, sondern lediglich als Repräsentanten der beiden so eben aufgestellten unendlichen Reihen auf; und diese letzteren sind es auch, die in der Differenzial- und Integralrechnung, wo nur von der abstrakten Größe oder von der Größe die Rede ist, insofern solche als

Repräsentant mehrerer Einheiten auftritt, jedesmal in Betracht zu ziehen sind, um manches Resultat begreifen zu können.

§. IV. Das Integrationsverfahren, das in §. VI des vorangehenden Kapitels zur Anwendung kam, wurde hier sammt den nöthigen Bemerkungen, welche auf die Integrationsgrenzen Bezug haben, mitgetheilt und auf mehrere Fälle angewandt, die nach anderen Methoden nicht so leicht zu behandeln sein dürften.

§. V. Die in den drei vorangeschickten Paragraphen mitgetheilten Integrationsmethoden kommen hier abwechselnd zur Anwendung; auch sind hier einige nicht uninteressante Transformationen und Integrationsbestimmungen mittelst ohne Ende fortlaufenden, convergenten und summirbaren Reihen gewonnen worden. Eine klare und schnelle Uebersicht über den Inhalt dieses Paragraphen erhält man aus dem nachfolgenden Inhaltsverzeichniße.

Das vierte und letzte Kapitel dieses Bandes hat zum Gegenstande die näherungsweise Bestimmung der Integralien, und zerfällt in drei Paragraphen folgenden Inhaltes:

§. I. Annäherungsweise Integration durch ohne Ende fortlaufende Reihen. — Nachdem ein Satz über Convergenz von ohne Ende fortlaufenden Reihen, deren Glieder ungleiche Zeichen tragen, mitgetheilt ward, wurde sofort auf folgendem Wege zur Darstellung der Integralien durch ohne Ende fortlaufende Reihen geschritten. In der zu integrirenden Differenzialformel $\varphi(x)dx$ zerlegte man die Function $\varphi(x)$ in eine ohne Ende fortlaufende und convergente Gliederreihe von Functionen von x dergestalt, daß jede dieser Functionen mit dx multiplicirt, nach den zwei vorangehenden Kapiteln als integrirbar und die Gesammtheit dieser Integralien für numerische Bestimmungen, als brauchbar sich herausstellte. — Daß das Zerfällen der Function $\varphi(x)$ in eine unendliche Reihe von Functionen von x nicht ganz gleichgültig sei, ist in Nr. 197 an zwei besonderen Fällen dargethan worden. Ferner ereignet es sich nur zu oft, daß die Function $\varphi(x)$ in vorhin angedeuteter

Weise behandelt, zumal dann wenn eine der Integrationsgrenzen unendlich großwerdend ist, im Integralwerthe unendlich großwerdende Glieder hervorruft. In den Nrn. 198 — 202 kommen mehrere Integralausdrücke dieser Art vor; dieselben sind nach drei, zwar ungleichen Verfahrungsweisen behandelt worden, die aber sämmtlich dahin streben, die vorgelegten Integralausdrücke auf andere zurückzuführen, die keine der Integrationsgrenzen unendlich großwerdend haben, und sonach dem Uebelstande, unendlich großwerdende Glieder im Integralwerthe zu haben, nicht mehr unterliegen. So erscheint in Nr. 198 das Integrale $\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin.}x)dx$ auf die Ermittelung des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin.}x)dx$ zurück gebracht; in den Nrn. 199 und 200 erscheinen einige Integralien der Form $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ mittelst der Gleichung $\int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx - \int_0^a \varphi(x)dx$ (da in den vorgelegten Fällen das $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ anderwärts bestimmt wurde), von dem Integrale $\int_0^a \varphi(x)dx$ abhängig, welches in gewöhnlicher Weise behandelt, keine unendlich großwerdende Glieder im Integralwerthe darbietet; endlich sind in den Nrn. 201 und 202 zwei bestimmte Integralien analog wie im vorhergehenden Falle behandelt worden, nämlich durch die Gleichung $\int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx - \int_0^a \varphi(x)dx$, und da das Integrale $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ hier nicht als bekannt vorausgesetzt werden konnte, so ist die Schwierigkeit durch Einführung einer Constante c umgangen worden, die im Verlaufe dieser Nrn. numerisch ermittelt wurde. Dieselbe erscheint dem Zahlenwerthe nach durch die Gleichung (α) Nr. 201 gegeben und durch eine jede der Grenzgleichungen (A) Nr. 202 dargestellt; mit einer größeren Genauigkeit als durch die Gleichung (α) erscheint diese Constante

in §. II. des vorliegenden Kapitels Nr. 225, Gleichung (α') gegeben. Die bestimmten Integralien, die in den Nrn. 203 bis 207 vorgeführt wurden, enthalten sämmtlich diese eben erwähnte Constante c. — Den Beschluß dieses Paragraphen bildet

das Integrale $\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}}$, bei welchem gezeigt wurde,

daß bisweilen durch eine passende Umformung eines vorgelegten Integrals auch die unendliche Reihe, welche den Werth desselben repräsentirt, der Art umgeformt erscheint, daß dieselbe alsdann schneller, als vor der Umformung zum numerischen Werthe des Integrals führt.

§. II. Das Integrationsverfahren durch ohne Ende fortlaufende Factorenfolgen, das den Inhalt des vorliegenden Paragraphen ausmachen soll, ward einzig auf die Herstellung der Euler'schen Integralien erster und zweiter Art angewandt. Der Zweck dieses Paragraphen war weniger, das in der Uebersicht angezeigte Integrationsverfahren heraus zu heben und zu beleuchten, sondern vielmehr die Functionen, welche die Euler'schen Integralien repräsentiren zu untersuchen; um dadurch zu zeigen, wie es eigentlich die Integralrechnung ist, die neue Functionen in die Analyse einführt und deren wichtigste Eigenschaften kennen lehrt.

In Nr. 214 ward das bestimmte $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, für alle positive Werthe von a durch eine ohne Ende fortlaufende Factorenfolge dargestellt, und in der darauf folgenden Nr. deren Convergenz dargethan; die beiden darauf folgenden Nrn. 216 und 217 stellen noch einige Integralien von derselben Factorenfolge abhängig dar, so wie die Begriffsbestimmungen der Euler'schen Integralien erster und zweiter Art fest. Diese ohne Ende fortlaufende Factorenfolge, die von a dependirt, tritt von Nr. 214 angefangen und in allen darauf folgenden Nrn. dieses Paragraphen als neue und selbstständige Function auf, die nach

Legendre, die Function Gamma der allgemeinen Größe a benannt und durch Γ(a) dargestellt wurde. Die Nrn. 218 und 219 drücken die Werthe noch einiger bestimmten Integralien sowohl durch die Function Gamma, als durch den Differenzialquotienten derselben aus. Die Nrn. 220 — 223 enthalten die vorzüglichsten Eigenschaften der Function Gamma, die sämmtlich nur mit Hülfe der Integralrechnung gefolgert worden sind. Die darauf folgenden Nrn. haben zum Gegenstande die numerische Bestimmung dieser Function für gegebene Werthe der allgemeinen Größe, und die Angabe noch einiger Integralien mittelst der Function Gamma.

§. III. Das allgemeine Integrationsverfahren durch Annäherung, das im vorliegenden Paragraphen mit der größten Ausführlichkeit behandelt wurde, ist das der Quadraturen, und stützt sich auf die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ .\ .\ +\varphi(b-\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\},$$

en der ω eine unendlich kleinwerdende, reelle Größe bedeutet. Da in der Nr. 243 eine gedrängte Zusammenstellung der Ergebnisse dieses Paragraphen mitgetheilt wurde, so dürfte ein einfaches Hinweisen auf diese Nr. hier genügen.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung, Seite 1.

Die Differenzialrechnung.

Erstes Kapitel. Differenziation der Functionen einer Variabeln, Seite 7.

Zweites Kapitel. Anwendungen auf Functionen einer Variabeln. Seite 20.

Die Integralrechnung.

Erstes Kapitel. Bedeutung, Bezeichnung und Werth einer Integralfunction. Seite 35.

Zweites Kapitel. Die verschiedenen Methoden unbestimmte Integralfunctionen darzustellen. Seite 42.

Drittes Kapitel. Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien. Seite 160.

§. I. Einleitende Bemerkungen, und Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz bestimmter Integralien und unendlicher Reihen. Seite 160.

§. II. Integration durch ohne Ende fortlaufende Factorenfolgen. Seite 391.

§. III. Allgemeines Verfahren die numerischen Werthe bestimmter Integralien näherungsweise zu ermitteln. Seite 425.

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Einleitung.

1. Jede algebraische Verrichtung (functio) mit einer allgemeinen Größe wird eine **Function** dieser Größe genannt.

Anmerkung. Zu den algebraischen Verrichtungen gehören: das Addiren, Multipliciren, Potenziren und die Gegensätze: das Subtrahiren, Dividiren, Depotenziren oder Wurzelausziehen.

2. Kommen diese Verrichtungen in endlicher Anzahl vor, so nennt man die Function **algebraisch**. Der Ausdruck:

$$\frac{x^3 - 3\sqrt{x}}{7x - 8\sqrt[3]{1+x} - x^7},$$

stellt eine solche algebraische Function der allgemeinen Größe x dar.

3. Kommen hingegen dergleichen algebraische Verrichtungen in unendlicher Anzahl vor, ohne solche auf eine endliche Anzahl zurück bringen zu können, dann hat man es mit einer **transcendenten** Function zu thun. So stellen die ins Unendliche fortzusetzenden algebraischen Operationen:

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ in inf. ,} \qquad \text{(I)}$$

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \text{ in inf. ,} \qquad \text{(II)}$$

$$(1 - 4x^2)\,(1 - \tfrac{4}{9}x^2)\,(1 - \tfrac{4}{25}x^2)\,(1 - \tfrac{4}{49}x^2) \text{ in inf. ,} \qquad \text{(III)}$$

transcendente Functionen der allgemeinen Größe x vor.

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Einleitung.

1. Jede algebraische Verrichtung (functio) mit einer allgemeinen Größe wird eine **Function** dieser Größe genannt.

Anmerkung. Zu den algebraischen Verrichtungen gehören: das Addiren, Multipliciren, Potenziren und die Gegensätze: das Subtrahiren, Dividiren, Depotenziren oder Wurzelausziehen.

2. Kommen diese Verrichtungen in endlicher Anzahl vor, so nennt man die Function **algebraisch**. Der Ausdruck:

$$\frac{x^3 - 3\sqrt{x}}{7x - 8\sqrt[3]{1+x} - x^7},$$

stellt eine solche algebraische Function der allgemeinen Größe x dar.

3. Kommen hingegen dergleichen algebraische Verrichtungen in unendlicher Anzahl vor, ohne solche auf eine endliche Anzahl zurück bringen zu können, dann hat man es mit einer **transcendenten** Function zu thun. So stellen die ins Unendliche fortzusetzenden algebraischen Operationen:

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \quad \text{in inf.}, \qquad \text{(I)}$$

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \quad \text{in inf.}, \qquad \text{(II)}$$

$$(1 - 4x^2)\,(1 - \tfrac{4}{9}x^2)\,(1 - \tfrac{4}{25}x^2)\,(1 - \tfrac{4}{49}x^2) \quad \text{in inf.}, \qquad \text{(III)}$$

transcendente Functionen der allgemeinen Größe x vor.

4. Einige der transcendenten Functionen sind bereits hinlänglich untersucht und unter bestimmten Benennungen in der Analysis bekannt.

So wird die Function (I) der Sinus der Größe x,
(II) der natürliche Logarithmus der Größe x,
(III) der Cosinus der mit der bekannten Ludolphischen Zahl π multiplicirten allgemeinen Größe x genannt.

5. Will man im Allgemeinen irgend eine Function einer allgemeinen Größe x andeuten oder bezeichnen, so setzt man derselben einen der Buchstaben f, F, φ, ψ, . . vor. Es stellen demnach die Symbole f(x), F(x), $\varphi(x)$, $\psi(x)$ . . beliebige, algebraische oder transcendente Functionen der allgemeinen Größe x dar.

6. Der Zahlenwerth einer Function richtet sich im Allgemeinen nach dem der allgemeinen Größe x beigelegten Werthe. Es zeugen die in den Nr. 2, 3 aufgeführten Beispiele von der Richtigkeit dieser Behauptung. Aus diesem Grunde wird dem Ausdrucke Function auch der Begriff der Abhängigkeit beigelegt, und man definirt eine Function wie folgt:

Jeder von einer allgemeinen Größe x abhängige Ausdruck (Nr. 2 u. 3), der sich zugleich mit dieser Größe ändert, ist eine Function dieser Größe.

In dieser Bedeutung wird der Ausdruck Function bei allen folgenden Untersuchungen auftreten.

7. Da nun eine Function ebenfalls eine mathematische Größe oder Zahl ist, so unterliegt dieselbe allen algebraischen Operationen der einfachen Größe, und wird nach gleichen Regeln, wie die einfache Größe bei allen analytischen Untersuchungen behandelt.

8. Wir haben bereits (in den Nrn. 2, 3) die Functionen in algebraische und transcendente abgetheilt; um sich jedoch leichter mittheilen zu können, wird noch die algebraische Function in Unterabtheilungen zerfällt. Man spricht von rationalen und irrationalen algebraischen Functionen; erstere führen keine unauflösbaren Wurzelgrößen mit sich, während die letzteren die allgemeine Größe, mit

nicht wegzuschaffenden Wurzelzeichen behaftet enthalten. Jede dieser Abtheilungen wird ferner in ganze und gebrochene Functionen abgetheilt; wenn nämlich die allgemeine Größe nicht als Divisor auftritt, wird sie eine algebraisch ganze (rationale oder irrationale) Function genannt; kommt hingegen diese allgemeine Größe auch als Nenner oder Divisor vor, aus dem sie nicht weggeschafft werden kann, dann wird sie eine algebraisch gebrochene (rationale oder irrationale) Function genannt.

9. Was die transcendenten Functionen betrifft, kann, ihrer unendlichen Anzahl wegen, von einer Abtheilung oder Klassification derselben keine Rede sein. Dennoch wird jede einzelne dieser Functionen verschiedentlich abgetheilt. Wir wollen nur als Beispiel die Exponentialfunction a^x, wo x die allgemeine Größe ist, vorführen.

Wenn

$$a = e = 2{,}7182818\ldots$$

angenommen wird, so hat man zur Bestimmung der Exponentialfunction für die Grundzahl e folgende Gleichung:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Verbleibt x in der ganzen Allgemeinheit einer reellen Zahl, so nennt man jeden Theil links und rechts vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung Exponentialfunction für die Basis e. Wird hingegen $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt, wodurch man:

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)$$

erhält, so kann man den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen trigonometrische Function der allgemeinen Größe x nennen; denn es stellt der auf der ersten Zeile rechts vom Gleichheitszeichen befindliche Ausdruck den Cosinus irgend eines mit dem Halbmesser eins beschriebenen Kreisbogens x dar, und die mit dem Factor $\sqrt{-1}$ behaftete transcendente Function, auf derselben Seite des Gleichheitzeichens, stellt den Sinus eines Bogens x in demselben Kreise dar. Man schreibt daher auch

$$\text{Cos.}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\text{Sin.}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

oder auch:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \text{Cos.}x + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}x.$$

Eine ausführliche Angabe der Eigenschaften der trigonometrischen Größen (Functionen) und deren Abhängigkeit von der Exponentialfunction mit der Basis e wird hier füglich ausbleiben dürfen.

Der Exponentialfunction, wenn die allgemeine Größe reell gedacht wird, entspricht auch eine inverse, welche logarithmische Function einer allgemeinen Größe genannt wird; und zu den durch Einführung von $x\sqrt{-1}$ statt x entspringenden trigonometrischen Functionen stehen die sogenannten Kreisfunctionen in inversen Beziehungen. Die Symbole dieser inversen Functionen sind:

$$\log.x,\ \text{arc.Cos.}x,\ \text{arc.Sin.}x\ .$$

Alle diese Functionen entspringen aus der Exponentialfunction a^x, für welche man hat:

$$a^x = 1 + x\log.a + \frac{x^2}{1.2}(\log.a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(\log.a)^3 + \ldots,$$

wo log.a den Logarithmus von a für die Basis e bedeutet, oder es stellt log.a den natürlichen Logarithmus von a vor.

Es bestehen somit folgende Unterabtheilungen der Exponentialfunction a^x.

I. Exponentialfunction einer allgemeinen Größe x mit der Basis e, und die derselben inverse, logarithmische Function einer allgemeinen Größe.

II. Trigonometrische Functionen, und die denselben inversen Kreisfunctionen einer allgemeinen Größe.

10. Was wir bis jetzt allgemeine Größe nannten, implicirt auch den Begriff der Variabilität, d. h. eine allgemeine Größe oder Zahl ist entweder aller Werthe fähig, oder kann doch wenigstens alle Werthe annehmen, die im Intervalle zweier ungleich großen Zahlen

a und b liegen: aus diesem Grunde wird eine solche Größe eine Variable genannt. Man bedient sich in der Regel der Endbuchstaben . . . x, y, z des Alphabets, um dieselben darzustellen. Im Gegensatze dieser Variabeln giebt es Constante oder Größen, die nur bestimmter oder unveränderlicher Werthe fähig sind, und die man gewöhnlich durch die Anfangsbuchstaben a, b, c . . des Alphabets darzustellen pflegt.

11. Da Functionen solcher allgemeinen Größen ebenfalls den Character der Variabilität haben, daher auch variable Größen genannt werden können; so nennt man, um den Unterschied besser herauszuheben, erstere absolute und letztere relative oder auch abhängige Variable.

12. Die Auseinandersetzung der verschiedenartigen Beziehungen zwischen diesen beiden Arten von Variabeln, macht den Inhalt der Functionenlehre aus.

13. Die bekannten Operationen der Algebra (Addiren, Multipliciren und Potenziren) stellen diese Beziehungen nur für endliche Werthe der Variabeln, und ebenfalls ihre wechselseitigen Aenderungen nur für endliche Aenderungen der Variabeln dar. Diese wechselseitigen Einflüsse für unendlich kleinwerdende Aenderungen der Variabeln erfährt man durch die Operation des Differenzirens, welche sammt dem Gegensatze, der Operation des Integrirens, den Inhalt des Differenzial- und Integral-Calculs ausmachen.

14. Da die Functionen bei unendlich kleinwerdenden Variationen der absoluten Variabeln entweder:

a) unendliche kleinwerdende Variationen, oder

b) endliche und sogar unendlich großwerdende Variationen erleiden können, so unterscheidet man diese zwei Zustände der Functionen dadurch, daß man sie im Falle a) continuirliche und im Falle b) discontinuirliche Functionen nennt.

Als Beispiel einer continuirlichen Function eignet sich sehr gut die Sinusfunction einer veränderlichen Größe x. Bei einer unendlich kleinwerdenden Zunahme des Bogens oder der Variabeln x erleidet auch der Sinus jedesmal nur eine unendlich kleinwerdende Aenderung. Die Tangentenfunction der Variabeln x hingegen, erleidet eine Unterbre-

chung in der Continuität, wenn x durch den Werth $\frac{\pi}{2}$ geht, oder es ist die Tangente von x in der Nähe von $x = \frac{\pi}{2}$ eine discontinuirliche Function von x.

15. Die discontinuirlichen Functionen können, wie aus dem Vorangeschickten erhellet, und wie aus dem Verfolge noch klarer hervorgehen wird, den Operationen des Differenzirens und Integrirens nicht unterzogen werden. Ein Criterium der Continuität ist in der vorhergehenden Nr. begriffsweise mitgetheilt worden; das Umsetzen dieses Begriffes in eine Gleichung, begründet den Differenzialcalcul.

Erstes Buch.

Die Differenzialrechnung.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Differenziation der Functionen einer Variabeln.

16. Stellt f(x) eine von x abhängige Größe oder eine Function von x vor, und wird durch ω eine ohne Ende abnehmende Größe dargestellt, so ist nach Einleitung Nr. 14 der Unterschied:

$$f(x+\omega) - f(x) ,$$

eine unendlich kleinwerdende Größe, wenn x einen jener Werthe darstellt, im Bereiche deren die Function f(x) continuirlich genannt wird.

Für jene Werthe von x hingegen, die diesem Unterschiede einen endlichen oder gar einen unendlich großwerdenden Werth beilegen, wird diese Function f(x) discontinuirlich genannt.

Dieses vorausgesetzt, besteht folgender höchst wichtige Satz, der als Fundament der gesammten Differenzialrechnung angesehen werden darf.

Im Bereiche aller Werthe von x, für die f(x) eine continuirliche Function von x verbleibt, ist der Grenzausdruck:

$$\text{Lim:} \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} , \qquad \text{(A)}$$

ebenfalls eine Function von x, wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Abnehmen von ω Bezug hat.

d. h. für je zwei dieser Größen anstellen, innerhalb deren die Function entweder zu-, oder abnimmt; woraus dann, durch das Zusammenstellen aller dieser einzelnen Fälle, die Richtigkeit der Behauptung in I hervorgeht.

II. Um nun zu zeigen, daß der Grenzausdruck (A) im ganzen Bereiche der Continuität der Function f(x) eine Function von x (nach Nr. 6 der Einleitung) sei, erübriget noch eine Erörterung über die Beschaffenheit jener Functionen, bei denen dieser Grenzausdruck für eine endliche Werthenfolge der Variabeln einen constanten, jedoch endlichen Werth behält.

Daß dieser Fall eigens erörtert werden muß, erhellt aus dem Umstande, daß eine solche Function in der That sich vorfindet. Wir haben hier die Function:

$$Ax + B\,,$$

im Auge, wo A und B von x unabhängig sind.

Da man

$$\frac{A(x+\omega) + B - (Ax+B)}{\omega} = A$$

hat, so ergiebt sich, wenn:

$$f(x) = Ax + B$$

angenommen wird, die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:}\ \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} = A\,,$$

in welchem Falle der mehrmals erwähnte Grenzausdruck keine Function von x, nach Nr. 6 ist. Daß nicht noch andere Functionen existiren, die mit der eben angeführten Eigenschaft begabt sind, wollen wir in Folgendem darthun.

Gesetzt es gäbe eine solche Function, die wir durch $\varphi(x)$ darstellen wollen, bei der man für eine Reihe von unmittelbar aufeinander folgenden Werthen von x, die im Bereiche ihrer Continuität fallen, die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:}\ \frac{\varphi(x+\omega) - \varphi(x)}{\omega} = A$$

annehmen dürfte, so müßte man bei der Annahme

$$\varphi(x) - Ax = \psi(x) ,$$

für dieselbe Folge von Werthen der Variabeln x die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \frac{\psi(x+\omega) - \psi(x)}{\omega} = 0$$

haben; allein nach I ist diese letzte Gleichung nur dann möglich, wenn $\psi(x)$ von x unabhängig ist, daher hat man, wenn diese von x unabhängige Größe durch B bezeichnet wird, die Gleichung:

$$\psi(x) = B \text{ und } \varphi(x) = Ax + B ,$$

woraus die Richtigkeit unserer letzten Behauptung hervorgeht.

Fassen wir nun die Ergebnisse aus I und II zusammen, so ersieht man, daß der Grenzausdruck (A) für keine Folge von Werthen der Variabeln x (den Fall $f(x) = Ax + B$ ausgenommen) einen und denselben Werth beibehalten oder constant bleiben kann. Es ist daher dieser Grenzausdruck, nach Einleitung Nr. 6, eine Function von x, w. z. b. w.

Diese Function von x werden wir in der Folge durch $f_1(x)$ bezeichnen und abgeleitete der Function f(x) nennen.

Es besteht somit die Gleichung:

$$\text{Lim}: \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} = f_1(x) , \tag{1}$$

als Grundlage bei allen folgenden Untersuchungen.

17. Das Auffinden der abgeleiteten Function zu jeder vorgelegten Function f(x) ist eines der ersten Geschäfte der Differenzialrechnung.

Die Größe ω der vorhergehenden Nr. oder die unendlich kleine Zunahme von x wird das Differenziale von x genannt und durch ein der Größe x vorgesetztes d angedeutet. Wenn also in der continuirlichen Function von x oder in f(x) die allgemeine Größe x eine unendlich kleine Aenderung dx erleidet, wodurch sie in f(x+dx) übergeht, so ist der Unterschied:

$$f(x+dx) - f(x) ,$$

vermöge der Continuität der Function, eine ohne Ende abnehmende Größe, welche das Differenziale von f(x) genannt und durch d. f(x) angedeutet wird.

Man hat also die Gleichung:

$$d.\,f(x) = f(x+dx) - f(x)\ ;$$

wird nun beiderseits vom Gleichheitszeichen durch dx dividirt, so hat man auch:

$$\frac{d.\,f(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\ . \qquad (2)$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist mit dem Ausdrucke links vom Gleichheitszeichen der Gleichung (1) gleichbedeutend; letzterer stellt, im Bereiche der Continuität der Function f(x), die in vorhergehender Nr. durch $f_1(x)$ dargestellte Function vor, daher hat man auch:

$$\frac{d.\,f(x)}{dx} = f_1(x)\ . \qquad (3)$$

Es stellt somit die abgeleitete Function den Verhältnißquotienten der Aenderung einer Function zur Aenderung der Variabeln dar, wenn letztere unendlich kleinwerdend vorausgesetzt wird.

Aus diesem Grunde wird auch die abgeleitete Function $f_1(x)$ Differenzialquotient der Function f(x) genannt.

Ferner folgt aus der Gleichung (3) die folgende:

$$d.\,f(x) = f_1(x)\,dx\ ; \qquad (4)$$

in dieser Gleichung erscheint $f_1(x)$ als Coefficient des Differenzials der Variabeln x, daher wird auch die abgeleitete Function $f_1(x)$ Differenzialcoefficient der Function f(x) genannt.

18. Wir wollen uns nun an die Entwickelung einiger allgemeinen Sätze machen, die bei Herstellung des Differenzialquotienten oder der abgeleiteten Function zur Anwendung kommen werden.

I. Multiplicirt man die Gleichung (2) mit einer von x unabhängigen Größe a, so hat man:

$$\frac{a\,d.\,f(x)}{dx} = \frac{a\,f(x+dx) - a\,f(x)}{dx}\ ;$$

allein nach derselben Gleichung (2) hat man auch:

$$\frac{d.\,a\,f(x)}{dx} = \frac{a\,f(x+dx) - a\,f(x)}{dx}\ ,$$

sonach erhält man folgende Gleichung:

$$d.\,a f(x) = a\,d.\,f(x)\ . \qquad (5)$$

II. Dieselbe Gleichung (2) giebt ferner, wenn f(x) und F(x) Functionen von x vorstellen,

$$\frac{d.\{f(x) \pm F(x)\}}{dx} = \frac{f(x+dx) \pm F(x+dx) - f(x) \mp F(x)}{dx}\ ,$$

oder auch:

$$\frac{d.\{f(x) \pm F(x)\}}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \pm \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}\ ,$$

woraus nun folgende Gleichung gewonnen wird:

$$d.\{f(x) \pm F(x)\} = d.\,f(x) \pm d.\,F(x)\ . \qquad (6)$$

III. Stellt $\varphi(x)$ irgend eine Function von x und $f[\varphi(x)]$ eine andere Function von $\varphi(x)$ vor, so giebt die Gleichung (2):

$$\frac{d.\,f[\varphi(x)]}{dx} = \frac{f[\varphi(x+dx)] - f[\varphi(x)]}{dx}\ :$$

die Gleichungen (2) und (3) gehörig verbunden geben:

$$\varphi(x+dx) - \varphi(x) = \varphi_1(x)dx\ ,$$

wo $\varphi_1(x)$ die abgeleitete der Function $\varphi(x)$ vorstellt, daher geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{d.\,f[\varphi(x)]}{dx} = \frac{f[\varphi(x)+\varphi_1(x)dx] - f[\varphi(x)]}{dx}\ ,$$

welche, wenn der Kürze wegen, rechts vom Gleichheitszeichen, $\varphi(x)=u$ angenommen wird, in folgende übergeht:

$$\frac{d.\,f[\varphi(x)]}{dx} = \frac{f[u+\varphi_1(x)dx] - f(u)}{dx}\ ;$$

für alle Werthe von x, für welche $\varphi_1(x)dx$ als unendlich kleinwerdende Größe sich darstellt, wird man nach Gleichung (4), da dx eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt, folgende Gleichung:

$$\varphi_1(x)dx = d.\,\varphi(x) = du$$

annehmen dürfen, woraus

$$dx = \frac{1}{\varphi_1(x)}\,du$$

gefolgert wird, folglich hat man:

$$\frac{d.\,f[\varphi(x)]}{dx} = \frac{f(u+du) - f(u)}{du}\,\varphi_1(x)\,,$$

und mit Zuziehung der Gleichung (2) die folgende:

$$\frac{d.\,f[\varphi(x)]}{dx} = f_1(u)\,\varphi_1(x)\,;$$

wenn hier für u der ursprüngliche Werth $\varphi(x)$ eingesetzt wird, so hat man:

$$d.\,f[\varphi(x)] = f_1[\varphi(x)]\,\varphi_1(x)dx\,. \tag{7}$$

Diese Gleichung mit der Gleichung (4) verglichen, giebt folgendes höchst einfache Verfahren aus bekannten Differenzialien neue abzuleiten: In eine Gleichung wie (4) ist man statt x jede Function von x, wie etwa $\varphi(x)$ zu setzen berechtiget, wenn man nur zugleich dx in $\varphi_1(x)dx$ umsetzt.

Zugleich gelangt man auf diesem Wege zu folgender Grenzgleichung:

$$\text{Lim:}\,\frac{f[\varphi(x+\omega)] - f[\varphi(x)]}{\omega} = f_1[\varphi(x)]\,\varphi_1(x)\,,$$

die im Bereiche jener Werthe von x Statt findet, für welche die Functionen $\varphi(x)$ und $f[\varphi(x)]$ continuirlich sind.

19. Machen wir uns nun an die Herstellung der abgeleiteten Functionen der zwei bis jetzt bekanntesten Functionen, der algebraischen und der exponentiellen.

I. Der Ausdruck x^m, wo m eine willkührliche Constante bedeutet, kann als Repräsentant der algebraischen Function angesehen werden.

Wenn also

$$f(x) = x^m$$

gesetzt wird, so ist:

$$f_1(x) = \text{Lim:}\,\frac{(x+\omega)^m - x^m}{\omega}\,,$$

oder auch:

$$f_1(x) = \text{Lim:}\,x^m\,\frac{\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^m - 1}{\omega}\,;$$

nun hat man, für jeden Werth von x, der größer als ω gedacht wird, die Gleichung:

$$\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^m = 1 + m\,\frac{\omega}{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{\omega^2}{x^2} + \ldots,$$

daher ist

$$f_1(x) = mx^{m-1},$$

und hieraus:

$$d.\,x^m = m\,x^{m-1}\,dx\,. \qquad \text{(I)}$$

II. Es sei

$$f(x) = a^x\,,$$

so hat man:

$$f_1(x) = \text{Lim}:\ \frac{a^{x+\omega}-a^x}{\omega}\,,$$

oder

$$f_1(x) = \text{Lim}:\ a^x\,\frac{a^\omega-1}{\omega}\,;$$

allein man hat:

$$a^\omega = 1 + \omega\log.a + \frac{\omega^2}{1.2}(\log.a)^2 + \frac{\omega^3}{1.2.3}(\log.a)^3 + \ldots,$$

daher ist

$$f_1(x) = a^x\log.a\,,$$

und hieraus findet man:

$$d.\,a^x = a^x\log.a\,dx\,, \qquad \text{(II)}$$

wo log.a den natürlichen Logarithmus von a vorstellt (Nr. 9).

Diese Gleichungen (I) und (II) sind als Fundamentalgleichungen bei der Differenziation der algebraischen und exponentiellen Functionen anzusehn.

20. Wenn in der Gleichung (II) der vorigen Nr. a in e (Nr. 9) umgesetzt wird, so hat man, wegen $\log.e = 1$, die Gleichung:

$$d.\,e^x = e^x\,dx\,. \qquad (8)$$

Geht in dieser Gleichung x in log.x über, so haben wir nach Gleichung (7):

$$d.\,e^{\log.x} = e^{\log.x}\,d.\log.x\,;$$

nun ist $e^{\log.x} = x$, daher hat man:

$$dx = x\,d.\log.x\ ,$$

woraus

$$d.\log.x = \frac{dx}{x} \qquad (9)$$

gefolgert wird.

In derselben Gleichung (8) setze man x in xi um, so geht, wenn i independent von x ist, dx in idx über, und man hat vermöge der Gleichung (7):

$$d.e^{xi} = i\,e^{xi}\,dx\ ;$$

wird hier $i = \sqrt{-1}$ angenommen, so hat man:

$$d.(\mathrm{Cos}.x + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x\,dx - \mathrm{Sin}.x\,dx\ ,$$

welche, mit Zuziehung der Gleichungen (5) und (6), folgende giebt:

$$d.\mathrm{Cos}.x + \sqrt{-1}\,d.\mathrm{Sin}.x = \sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x\,dx - \mathrm{Sin}.x\,dx\ ;$$

geht hier $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ über, so hat man auch:

$$d.\mathrm{Cos}.x - \sqrt{-1}\,d.\mathrm{Sin}.x = -\sqrt{-1}\,\mathrm{Cos}.x\,dx - \mathrm{Sin}.x\,dx\ ;$$

werden diese Gleichungen addirt und subtrahirt, so ergeben sich folgende zwei Differenzialwerthe:

$$\left.\begin{array}{l} d.\mathrm{Cos}.x = -\,\mathrm{Sin}.x\,dx\ , \\ d.\mathrm{Sin}.x = +\,\mathrm{Cos}.x\,dx\ . \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Geht ferner in der zweiten dieser Gleichungen x in arc.Sin.x über, so hat man:

$$d.\mathrm{Sin}.(\mathrm{arc.Sin}.x) = +\,\mathrm{Cos}.(\mathrm{arc.Sin}.x)\,d.\mathrm{arc.Sin}.x\ ;$$

nun ist:

$$\mathrm{Sin}.(\mathrm{arc.Sin}.x) = x\ ,$$

$$\mathrm{Cos}.(\mathrm{arc.Sin}.x) = \sqrt{1-x^2}\ ,$$

daher zieht man aus der vorigen Gleichung die folgende:

$$d.\mathrm{arc.Sin}.x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ . \qquad (11)$$

21. Aus der Gleichung (9) kann man mit Zuziehung der Gleichung (7) zwei Gleichungen ableiten, die bei der Darstellung der Differenzialien vorgelegter Functionen wesentliche Dienste leisten.

Setzt man in (9) irgend eine Function von x, $\varphi(x)$ statt x, so giebt sie

$$d. \log. \varphi(x) = \frac{d. \varphi(x)}{\varphi(x)}, \tag{12}$$

woraus auch

$$d. \varphi(x) = \varphi(x)\, d. \log. \varphi(x), \tag{13}$$

gefolgert wird. Diese zwei Gleichungen sind es, deren wir eben Erwähnung thaten, und die wir auch zur Darstellung der Differenzialien einiger zusammengesetzten Functionen sogleich benützen wollen.

I. Es sei

$$\varphi(x) = f(x) . F(x),$$

wo f(x) und F(x) zwei beliebige Functionen von x sind.

Mit Zuziehung der Gleichung (13) erhält man

$$d. f(x) F(x) = f(x) . F(x)\, d. \left\{ \log. f(x) + \log. F(x) \right\}.$$

Berücksichtiget man die Gleichung (6), so hat man mit Beachtung der Gleichung (12)

$$d. f(x) F(x) = f(x) F(x) \left\{ \frac{d. f(x)}{f(x)} + \frac{d. F(x)}{F(x)} \right\},$$

oder auch

$$d. f(x) . F(x) = F(x)\, d. f(x) + f(x)\, d. F(x), \tag{14}$$

welche Gleichung die Vorschrift zum Differenziren eines Productes mehrerer Functionen von x enthält.

II. Wird in der Gleichung (13),

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{F(x)},$$

angenommen, so hat man

$$d. \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{F(x)}\, d. \left\{ \log. f(x) - \log. F(x) \right\};$$

daher mit Zuziehung der Gleichungen (6) und (12)

$$d. \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{F(x)\, d. f(x) - f(x)\, d. F(x)}{F(x)^2}. \tag{15}$$

Diese Gleichung lehrt jede gebrochene Function von x differenziren.

III. Ferner sei

$$\varphi(x) = [f(x)]^m,$$

wo m eine willkührliche Constante bedeutet, so giebt zuerst die Gleichung (13)

$$d.\, f(x)^m = f(x)^m\, d.\, m \log . f(x) \;,$$

daher mit Hülfe der Gleichungen (5) und (12)

$$d.\, f(x)^m = m\, f(x)^{m-1}\, d.\, f(x). \qquad (16)$$

Die Fundamentalgleichung (I) bildet einen speciellen Fall dieser Gleichung.

IV. Sei endlich

$$\varphi(x) = \sqrt[m]{f(x)} \;,$$

so findet man auf gleichem Wege wie die Gleichung (16)

$$d.\, \sqrt[m]{f(x)} = \frac{d.\, f(x)}{m \sqrt[m]{f(x)^{m-1}}} \;. \qquad (17)$$

Die wenigen bis jetzt aufgestellten Gleichungen reichen hin, die Differenzialien aller algebraischen und exponentiellen Functionen einer Variablen x anzugeben.

22. Verfährt man mit der ersten abgeleiteten Functien $f_1(x)$ auf dieselbe Art wie mit f(x), d. h. läßt man, im Bereiche der Werthe von x für welche $f_1(x)$ continuirlich ist, x in $x+\omega$ übergehen, so ist auch

$$\text{Lim}: \frac{f_1(x+\omega) - f_1(x)}{\omega} \;,$$

eine Function von x.

Diese Function von x bezeichnen wir durch $f_2(x)$ und nennen sie: die abgeleitete Function von $f_1(x)$ oder die zweite abgeleitete Function von f (x). Man hat also folgende Gleichung

$$\text{Lim}: \frac{f_1(x+\omega) - f_1(x)}{\omega} = f_2(x) \;;$$

und wenn, beim Weglassen des Grenzzeichens Lim:, dx statt ω gesetzt wird, hat man auch:

$$\frac{f_1(x+dx) - f_1(x)}{dx} = f_2(x) \;,$$

oder

$$\frac{d.\, f_1(x)}{dx} = f_2(x) \;.$$

Es ist also, wie diese Gleichung zeigt, die zweite abgeleitete Function von f(x) der Differenzialquotient der ersten abgeleiteten Function von f(x).

Ferner ist nach Gleichung (3),

$$f_1(x) = \frac{d. f(x)}{dx};$$

daher

$$d. f_1(x) = d. \frac{d. f(x)}{dx}.$$

Wird nun dx als von x unabhängig angesehn (welches allerdings gestattet werden kann, da dx an der Stelle der unendlich kleinen, im Uebrigen willkührlichen Größe ω steht); so hat man auch:

$$d. f_1(x) = \frac{d. d. f(x)}{dx}.$$

Schreibt man nun $d^2 f(x)$ statt d. d. f(x), so hat man auch:

$$\frac{d^2. f(x)}{dx^2} = f_2(x),$$

vermöge welcher Gleichung $f_2(x)$ auch zweiter Differenzialquotient von f(x) genannt wird.

Mit der letzten Gleichung ist auch folgende gleichbedeutend:

$$d^2. f(x) = f_2(x)\, dx^2;$$

daher auch zuweilen $f_2(x)$ zweiter Differenzialcoefficient von f(x) genannt wird.

Wird mit $f_2(x)$ wie mit $f_1(x)$ und mit f(x) verfahren, so entsteht eine dritte abgeleitetete Function $f_3(x)$, oder ein dritter Differenziatquotient $\frac{d^3. f(x)}{dx^3}$, oder endlich ein dritter Differenzialcoefficient der Function f(x) u. s. w.

Allgemein wird man haben, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$\text{Lim}: \frac{f_{n-1}(x+\omega) - f_{n-1}(x)}{\omega} = f_n(x),$$

oder auch:

$$f_n(x) = \frac{d. f_{n-1}(x)}{dx} = \frac{d^2 f_{n-2}(x)}{dx^2} = \frac{d^3 f_{n-3}(x)}{dx^3} = \ldots = \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

welche Gleichungen nur unter der Voraussetzung Bestand haben, daß bei der jedesmaligen Aenderung der Variablen x die unendlich klein werdende Größe dx, als Constante oder als von x unabhängig, behandelt worden sei.

Zweites Kapitel.

Anwendungen auf Functionen einer Variablen.

§. I.

Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe.

23. Mit Zuziehung der Differenzialquotienten oder der Ableitungen $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . kann man jede continuirliche Function einer allgemeinen Größe x, wenn x eine endliche Zunahme erleidet, durch eine unendliche Reihe darstellen, die nach aufsteigenden Potenzen dieser endlichen Zunahme fortgeht.

Es ist

$$f_1(x) = \text{Lim}: \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}.$$

Geht x in $x + \omega$ über, so hat man:

$$f_1(x+\omega) = \text{Lim}: \frac{f(x+2\omega) - f(x+\omega)}{\omega}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man:

$$f_1(x+\omega) - f_1(x) = \text{Lim}: \frac{f(x+2\omega) - 2f(x+\omega) + f(x)}{\omega}.$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit $\frac{1}{\omega}$, so hat man auch:

$$\text{Lim}: \frac{f_1(x+\omega) - f_1(x)}{\omega} = \text{Lim}: \frac{f(x+2\omega) - 2f(x+\omega) + f(x)}{\omega^2},$$

oder

$$f_2(x) = \text{Lim}: \frac{f(x+2\omega) - 2f(x+\omega) + f(x)}{\omega^2};$$

behandelt man diese Gleichung wie die vorgelegte, so hat man auch:

$$f_3(x) = \text{Lim}: \frac{f(x+3\omega) - 3f(x+2\omega) + 3f(x+\omega) - f(x)}{\omega^3}.$$

Auf diesem Wege fortgefahren, erhält man endlich:

$$f_n(x) =$$

$$= \text{Lim}: \frac{f(x+n\omega) - \binom{n}{1} f[x+(n-1)\omega] + \binom{n}{2} f[x+(n-2)\omega] - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x)}{\omega^n}$$

wo n eine beliebige ganze, positive Zahl vorstellt und $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ . . . die Coefficienten der aufsteigenden Potenzen von x in der Entwickelung des Binomiums $(1+x)^n$ sind.

Multiplicirt man die Gleichungen, welche $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . $f_n(x)$ geben, der Ordnung nach mit $\binom{n}{1}\omega$, $\binom{n}{2}\omega^2$, . . . $\binom{n}{n}\omega^n$, addirt sie dann, fügt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens f(x) hinzu und nimmt die Grenze in Bezug auf das unendliche Abnehmen von ω; so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\left\{1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\right\}f(x)$$
$$+\left\{\binom{n}{1}-\binom{2}{1}\binom{n}{2}+\binom{3}{2}\binom{n}{3}\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}\right\}\text{Lim}:f(x+\omega)$$
$$+\left\{\binom{n}{2}-\binom{3}{1}\binom{n}{3}+\binom{4}{2}\binom{n}{4}\ldots+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}\binom{n}{n}\right\}\text{Lim}:f(x+2\omega)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left\{\binom{n}{n-1}-\binom{n}{1}\binom{n}{n}\right\}\text{Lim}:f[x+(n-1)\omega]$$
$$+\text{Lim}:f(x+n\omega)=$$
$$=\text{Lim}:\left\{f(x)+\binom{n}{1}\omega f_1(x)+\binom{n}{2}\omega^2 f_2(x)+\ldots+\binom{n}{n}\omega^n f_n(x)\right\}.$$

In dieser Gleichung ist der Coefficient von Lim: $f(x+k\omega)$, den wir durch C_k darstellen wollen, durch folgende Gleichung gegeben:

$$C_k=\binom{n}{k}-\binom{k+1}{1}\binom{n}{k+1}+\binom{k+2}{2}\binom{n}{k+2}-\ldots+(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}\binom{n}{n}.$$

Hebt man im Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen $\binom{n}{k}$ als gemeinschaftlichen Factor heraus, so ist auch

$$C_k=\binom{n}{k}\left\{1-\binom{n-k}{1}+\binom{n-k}{2}-\binom{n-k}{3}+\ldots+(-1)^{n-k}\binom{n-k}{n-k}\right\},$$

oder auch:

$$C_k=\binom{n}{k}(1-1)^{n-k}.$$

Also hat man

$$C_k=o\text{; wenn } k<n \text{ ist.}$$

Es geht daher die obige Gleichung, wenn das Grenzzeichen beiderseits wegbleibt, über in:

$$f(x+n\omega)=$$
$$=f(x)+\binom{n}{1}\omega f_1(x)+\binom{n}{2}\omega^2 f_2(x)+\ldots+\binom{n}{n}\omega^n f_n(x). \quad (18)$$

Von dieser Gleichung werden wir bei der Darstellung der Taylor'schen Reihe ausgehen.

24. Stellt k irgend eine ganze Zahl vor, die jedoch an die Be-

dingung $k < n$ gebunden ist, dann kann man der Gleichung (18) folgende Form geben

$$f(x+n\omega) =$$
$$= f(x) + \binom{n}{1}\omega f_1(x) + \binom{n}{2}\omega^2 f_2(x) + \ldots + \binom{n}{k-1}\omega^{k-1} f_{k-1}(x) + R_k \; ; \quad (19)$$

wo man

$$R_k = \binom{n}{k}\omega^k f_k(x) + \binom{n}{k+1}\omega^{k+1} f_{k+1}(x) + \ldots + \binom{n}{n}\omega^n f_n(x) \; ,$$

hat. Diese Größe R_k, die auch wie folgt gegeben werden kann:

$$R_k =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \omega^{n-k} f_n(x) + \binom{n}{1}\omega^{n-k-1} f_{n-1}(x) + \binom{n}{2}\omega^{n-k-2} f_{n-2}(x) \\ + \ldots + \binom{n}{n-k-1} f_{k+1}(x) + \binom{n}{n-k} f_k(x) \end{array} \right\} \omega^k \; ,$$

wollen wir durch die Einführung der Größen:

$f_k(x+k\omega)$, $f_k[x+(k+1)\omega]$, $f_k[x+(k+2)\omega]$, ... $f_k[x+(n-k)\omega]$,

von den Differenzialquotienten

$$f_{k+1}(x), \quad f_{k+2}(x), \quad f_{k+3}(x), \quad \ldots \quad f_n(x) \; ;$$

befreien.

Zu diesem Zwecke bedenke man folgende Gleichungen:

$$f_{k+1}(x) = \text{Lim}: \frac{f_k(x+\omega) - f_k(x)}{\omega}$$

$$f_{k+2}(x) = \text{Lim}: \frac{f_k(x+2\omega) - \binom{2}{1} f_k(x+\omega) + \binom{2}{2} f_k(x)}{\omega^2}$$

. . . .

$$f_{k+p}(x) =$$
$$= \text{Lim}: \frac{1}{\omega^p} \left\{ \begin{array}{l} f_k(x+p\omega) - \binom{p}{1} f_k[x+(p-1)\omega] + \ldots \\ + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} f_k(x+\omega) + (-1)^p \binom{p}{p} f_k(x) \end{array} \right\} .$$

Setzt man in der letzten Gleichung der Reihe nach,

$$p = n-k, \quad n-k-1, \quad n-k-2, \quad \ldots \quad 3, 2, 1,$$

so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$f_n(x) =$$
$$= \text{Lim}: \frac{1}{\omega^{n-k}} \left\{ \begin{array}{l} f_k[x+(n-k)\omega] - \binom{n-k}{1} f_k[x+(n-k-1)\omega] + \ldots \\ + (-1)^{n-k-1}\binom{n-k}{n-k-1} f_k(x+\omega) + (-1)^{n-k}\binom{n-k}{n-k} f_k(x) \end{array} \right\} ,$$

$$f_{n-1}(x) =$$
$$= \text{Lim}: \frac{1}{\omega^{n-k-1}} \left\{ \begin{array}{l} f_k[x+(n-k-1)\omega] - \binom{n-k-1}{1} f_k[x+(n-k-2)\omega] + \ldots \\ + (-1)^{n-k-2}\binom{n-k-1}{n-k-2} f_k(x+\omega) + (-1)^{n-k-1}\binom{n-k-1}{n-k-1} f_k(x) \end{array} \right\}$$

$$f_{n-2}(x) =$$

$$= \text{Lim}: \frac{1}{\omega^{n-k-2}} \left\{ \begin{array}{l} f_k[x+(n-k-2)\omega] - \binom{n-k-2}{1} f_k[x+(n-k-3)\omega] + \ldots \\ +(-1)^{n-k-3} \binom{n-k-2}{n-k-3} f_k(x+\omega) + (-1)^{n-k-2} \binom{n-k-2}{n-k-2} f_k(x) \end{array} \right\}$$

. . . .

$$f_{k+3}(x) =$$

$$= \text{Lim}: \frac{1}{\omega^3} \left\{ f_k(x+3\omega) - \binom{3}{1} f_k(x+2\omega) + \binom{3}{2} f_k(x+\omega) - \binom{3}{3} f_k(x) \right\} ,$$

$$f_{k+2}(x) = \text{Lim}: \frac{1}{\omega^2} \left\{ f_k(x+2\omega) - \binom{2}{1} f_k(x+\omega) + \binom{2}{2} f_k(x) \right\} .$$

$$f_{k+1}(x) = \text{Lim}: \frac{1}{\omega} \left\{ f_k(x+\omega) - f_k(x) \right\} ,$$

Nun multiplicire man diese Gleichungen, in der Ordnung wie sie aufeinander folgen, mit:

ω^{n-k}, $\binom{n}{1}\omega^{n-k-1}$, $\binom{n}{2}\omega^{n-k-2}$, . . $\binom{n}{n-k-3}\omega^3$, $\binom{n}{n-k-2}\omega^2$, $\binom{n}{n-k-1}\omega$,

füge dann, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der Summe aller dieser Gleichungen, den Ausdruck $\binom{n}{k}\omega^k f_k(x)$ hinzu; so erhält man mit Zuziehung des zuletzt angegebenen Werthes von R_k folgende Gleichung:

$$\begin{array}{l} R_k = \text{Lim}: \omega^k f_k[x+(n-k)\omega] \\ \quad - \text{Lim}: \omega^k f_k[x+(n-k-1)\omega] \left\{ \binom{n-k}{1} - \binom{n}{1} \right\} \\ \quad + \text{Lim}: \omega^k f_k[x+(n-k-2)\omega] \left\{ \binom{n-k}{2} - \binom{n-k-1}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} \\ \quad - \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \quad + (-1)^h \text{Lim}: \omega^k f_k[x+(n-k-h)\omega] \left\{ \begin{array}{l} \binom{n-k}{h} - \binom{n-k-1}{h-1}\binom{n}{1} + \ldots \\ +(-1)^{h-1}\binom{n-k-h+1}{1}\binom{n}{h-1} + (-1)^h \binom{n}{h} \end{array} \right\} \\ \quad + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array}$$

welche bis $h=n-k$ fortzusetzen ist.

Führt man der Kürze wegen folgende Bezeichnung ein:

$$\varphi(n) =$$

$$= \binom{n-k}{h} - \binom{n-k-1}{h-1}\binom{n}{1} + \binom{n-k-2}{h-2}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{h-1}\binom{n-k-h+1}{1}\binom{n}{h-1} + (-1)^h \binom{n}{h}$$

dann kann man auch statt der letzten Gleichung folgende setzen:

$$R_k = \sum_{h=o}^{h=n-k} (-1)^h \text{Lim}: \omega^k f_k [x+(n-k-h)\omega] \varphi(n) ,$$

wo das Summenzeichen $\sum_{h=o}^{h=n-k}$ über alle ganze Zahlenwerthe von $h=o$

bis $h=n-k$ sich erstreckt; d. h. man setze in dem auf das Summenzeichen $\sum\limits_{h=o}^{h=n-k}$ folgenden Ausdrucke, $h=o$, $h=1$, $h=2$, .. $h=n-k$ und addire die so erzeugten Resultate, dann erhält man genau den vorigen Werth von R_k.

Ehe wir weiter gehen, verweilen wir einen Augenblick beim Symbole $\varphi(n)$; denkt man sich daselbst n in $n+1$ umgesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}\varphi(n+1)-\varphi(n) = & \tbinom{n-k+1}{h}-\tbinom{n-k}{h}\\ & -\tbinom{n-k}{h-1}\tbinom{n+1}{1}+\tbinom{n-k-1}{h-1}\tbinom{n}{1}\\ & +\tbinom{n-k-1}{h-2}\tbinom{n+1}{2}-\tbinom{n-k-2}{h-2}\tbinom{n}{2}\\ & -\tbinom{n-k-2}{h-3}\tbinom{n+1}{3}+\tbinom{n-k-3}{h-3}\tbinom{n}{3}\\ & +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(-1)^{h-1}\tbinom{n-k-h+2}{1}\tbinom{n+1}{h-1}-(-1)^{h-1}\tbinom{n-k-h+1}{1}\tbinom{n}{h-1}\\ & +(-1)^{h}\tbinom{n+1}{h}-(-1)^{h}\tbinom{n}{h}\,.\end{aligned}$$

Die erste Zeile rechts vom Gleichheitszeichen geht über in:

$$\tbinom{n-k}{h-1}\,;$$

zu diesem Resultate das erste Glied der zweiten Zeile derselben Seite des Gleichheitszeichens hinzugefügt, erhält man:

$$-\tbinom{n-k}{h-1}\tbinom{n}{1}\,;$$

daher ist die Summe der ersten und zweiten Zeile rechts vom Gleichheitszeichen:

$$-\tbinom{n-k-1}{h-2}\tbinom{n}{1}\,.$$

Dieses Resultat, mit dem ersten Gliede auf der dritten dieser Zeilen vereinigt, giebt:

$$\tbinom{n-k-1}{h-2}\tbinom{n}{2}\,;$$

daher ist die Summe der drei ersten Zeilen:

$$\tbinom{n-k-2}{h-3}\tbinom{n}{2}\,.$$

Ebenso findet man als Summe der vier ersten Zeilen:

$$-\tbinom{n-k-3}{h-4}\tbinom{n}{3}\,,$$

und als Summe der h ersten Zeilen des Ausdruckes rechts vom Gleichheitszeichen:

$$(-1)^{h-1}\tbinom{n-k-h+1}{h-h}\tbinom{n}{h-1} \text{ oder } (-1)^{h-1}\tbinom{n}{h-1}\,.$$

Im Ganzen giebt es rechts vom Gleichheitszeichen $h+1$ Zeilen;

daher erübrigt noch das Hinzuzählen des eben gefundenen Resultates zur letzten Zeile; und da nach Vollziehung dieser Operation Null als Resultat hervorgeht, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$\varphi(n+1)=\varphi(n) .$$

Geht hier n nach und nach in $n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, 0 über, so hat man auch:

$$\varphi(n)=\varphi(o)=\binom{-k}{h} .$$

Man hat also:

$$\varphi(n)=(-1)^h \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+h-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ h} ,$$

oder auch:

$$\varphi(n)=(-1)^h\binom{k+h-1}{h}=(-1)^h\binom{k+h-1}{k-1} ;$$

daher ist der zuletzt aufgestellte Werth von R_k durch die Gleichung

$$R_k=\sum_{h=o}^{h=n-k}\mathrm{Lim}:\binom{k+h-1}{k-1}f_k[x+(n-k-h)\omega]\ \omega^k$$

gegeben; oder auch, wenn nach Weglassung des Summenzeichens die zu addirenden Theile in umgekehrter Ordnung aufgestellt werden:

$$R_k=$$

$$=\mathrm{Lim}:\left\{\begin{array}{l}\binom{n-1}{k-1}f_k(x)+\binom{n-2}{k-1}f_k(x+\omega)+\binom{n-3}{k-1}f_k(x+2\omega)\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ +\binom{k-1}{k-1}f_k(x+[n-k]\omega)\end{array}\right\}\omega^k. \quad (20)$$

25. Aus der letzten Gleichung der vorhergehenden Nr. läßt sich eine obere und eine untere Grenze für R_k ableiten, die vereint, auf eine Gleichung führen, welche die Einsicht in die Beschaffenheit des Werthes dieser Größe um ein Bedeutendes erleichtert.

Zuerst darf der Umstand nicht außer Acht gelassen werden, daß die Gleichung (20) nur unter der Bedingung, daß sämmtliche Ausdrücke

$$f_k(x)\ ,\ f_k(x+\omega)\ ,\ f_k(x+2\omega)\ \ldots\ f_k(x+[n-k]\omega)\ , \qquad (A)$$

continuirliche Functionen der allgemeinen Größe x seien, entwickelt werden konnte.

I. Halten wir somit hier und im ganzen weitern Verfolge dieser Untersuchung einen Werth von x fest, der dieser Anforderung entspricht, so wird, vermöge der Eigenschaft der Continuität der

Functionen in (A), eine dieser Functionen einen numerisch größten, jedoch endlichen Werth haben.

Sei $f_k(x+\lambda\omega)$ diese Function, wo λ eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . n—k bedeutet, dann besteht folgende Ungleichheit:

$$R_k < \text{Lim}: \left\{ \begin{matrix} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \ldots \\ \ldots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} \end{matrix} \right\} f_k(x+\lambda\omega)\,\omega^k .$$

Wird der innerhalb der Klammern befindliche Ausdruck in umgekehrter Ordnung aufgestellt, so geht er mit Beachtung der Gleichung

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} ,$$

über in:

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k+1}{2} + \binom{k+2}{3} + \ldots + \binom{n-1}{k-1} .$$

Addirt man die zwei ersten Glieder dieses Ausdruckes, so erhält man $\binom{k+1}{1}$; zu diesem Resultate das dritte Glied addirt, erhält man $\binom{k+2}{2}$; hiezu noch das vierte Glied addirt, hat man $\binom{k+3}{3}$ u. s. w. Endlich findet man als Summe sämmtlicher Glieder den Ausdruck:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} ;$$

daher hat man zur Bestimmung des obern Grenzwerthes von R_k folgende Ungleichheit:

$$R_k < \text{Lim}: \binom{n}{k}\,\omega^k\, f_k(x+\lambda\omega) .$$

II. Um einen untern Grenzwerth von R_k zu erhalten, sind wir der Deutlichkeit wegen genöthigt, den Fall, wo die Größen in (A) sämmtlich einerlei Zeichen haben, von jenem, in dem dieses nicht Statt findet, zu sondern.

a) Sämmtliche Functionen in (A) bieten keine Verschiedenheit der Zeichen dar. In diesem Falle wird, vermöge der Eigenschaft der Continuität dieser Functionen, eine derselben als numerisch kleinste, gleich oder größer als Null, auftreten. Sei $f_k(x+\mu\omega)$ diese Function, wo μ, mit Ausnahme der Zahl λ, eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 . . n—k sein wird, so wird man durch eine gleiche Betrachtung, wie in I, auf folgende Ungleichheit geführt:

$$R_k > \text{Lim}: \binom{n}{k}\,\omega^k\, f_k(x+\mu\omega) .$$

Berücksichtigt man nochmals die Continuität der Functionen in (A), so erhält man, wenn die eben aufgestellte Ungleichheit mit der Ungleichheit in I verglichen wird, folgende Gleichung:

$$R_k = \text{Lim}: \binom{n}{k} \omega^k f_k (x+\vartheta\omega) , \qquad (21)$$

wo ϑ eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, . . n—k sein wird.

b) Die Functionen in (A) gehen mehrere Abwechslungen der Zeichenzustände ein. In diesem Falle wird, ebenfalls der Continuität dieser Functionen wegen, eine oder mehrere derselben durch Null gehen müssen. Sei nun

$$f_k (x+\mu^1\omega) = 0 ,$$

wo μ^1 mit Ausnahme der Zahl λ eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, . . n—k bedeuten kann; dann hat man:

$$R_k \geqq \text{Lim}: \binom{n}{k} \omega^k f_k (x+\mu^1\omega) .$$

Wenn nun dieses Resultat mit der Ungleichheit in I verglichen wird, so gelangt man auf eine mit (21) ganz analoge Gleichung, welche die im Anfange dieser Nr. angekündigte ist; und offenbar besser als die Gleichung (20) geeignet ist, über den numerischen Werth von R_k Aufschluß zu geben. Setzt man nun den Werth von R_k aus (21) in Gleichung (19), so hat man auch

$$f(x+n\omega) = f(x) + \binom{n}{1} \omega f_1 (x) + \binom{n}{2} \omega^2 f_2 (x) + \ldots\ldots$$
$$+ \binom{n}{k-1} \omega^{k-1} f_{k-1} (x) + \text{Lim}: \binom{n}{k} \omega^k f_k (x+\vartheta\omega) \quad (22)$$

wo ϑ eine unter den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, . . n—k ist.

26. Die bis jetzt gewonnenen Resultate bestehen für alle ganze positive Werthe von n. Sie werden daher auch noch Statt finden, wenn n eine unendlich groß werdende Zahl bedeutet.

Sehen wir daher zu, was aus der Gleichung (22) wird, falls man n in den eben erwähnten Zustand versetzt und

$$n\omega = h ,$$

annimmt, wo h einen endlichen Werth vorstellt.

Wird unter k eine endliche ganze Zahl verstanden, so hat man dann:

$$\binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n^2}{1.2}, \binom{n}{3} = \frac{n^3}{1.2.3}, \ldots \binom{n}{k} = \frac{n^k}{1.2.3\ldots k} ,$$

und die Gleichung (22) geht über in:

$$f(x+h) = f(x) + h f_1(x) + \frac{h^2}{1.2} f_2(x) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} f_{k-1}(x) + \frac{h^k}{1.2.3\ldots k} f_k(x+\vartheta\omega).$$

Wird $\frac{h}{n}$ statt ω gesetzt, und bedenkt man, daß ϑ kleiner als n sei, so geht die obige Gleichung auch in folgende über:

$$f(x+h) = f(x) + h f_1(x) + \frac{h^2}{1.2} f_2(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{k-1}}{1.2.3\ldots k-1} f_{k-1}(x) + \frac{h^k}{1.2.3\ldots k} f_k(x+\alpha h), \qquad (23)$$

wo α eine positive, die Einheit nie erreichende Zahl vorstellt.

Diese Gleichung stellt das Taylor'sche Theorem dar; der Ausdruck rechter Hand vom Gleichheitszeichen, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wird Taylor'sche Reihe genannt; und das letzte Glied endlich bildet die Ergänzung zur Taylor'schen Reihe.

Dieses Theorem findet, wie aus dem Gange der Deduction desselben erhellt, für alle jene Werthe von x Statt, für welche die Functionen:

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ f_{k-1}(x),$$

continuirlich sind und für welche die Function $f_k(x)$ von x bis $x+\alpha h$ continuirlich verbleibt.

27. Besteht das durch die Gleichung (23) dargestellte Taylor'sche Theorem auch noch für $x=o$, so hat man für diese Annahme

$$f(h) = f(o) + h f_1(o) + \frac{h^2}{1.2} f_2(o) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{k-1}}{1.2.3\ldots k-1} f_{k-1}(o) + \frac{h^k}{1.2.3\ldots k} f_k(\alpha h),$$

wo $f(o)$, $f_1(o)$, $f_2(o)$ . . die Werthe von $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . für $x = o$ sind.

Setzt man nun in der letzten Gleichung h in x um, so hat man

$$f(x) = f(o) + x f_1(o) + \frac{x^2}{1.2} f_2(o) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} f_{k-1}(o) + \frac{x^k}{1.2.3\ldots k} f_k(\alpha x). \qquad (24)$$

Diese Gleichung stellt das Maclaurin'sche Theorem dar; der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wird die Maclaurin'sche Reihe und das letzte Glied die Ergänzung zur Maclaurin'schen Reihe genannt.

28. Noch eine, von der in Nr. 26 gegebenen, abweichende Form kann man dem Ergänzungsgliede zur Taylor'schen, mithin auch dem zur Maclaurin'schen Reihe geben, mit deren Herstellung wir uns auch noch beschäftigen wollen.

Wir beginnen dieses Geschäft, indem wir die Gleichung (23) zu Grunde legen. Setzt man daselbst

$$x + z \text{ statt } x, \text{ und } h - z \text{ statt } h ,$$

so hat man:

$$f(x+h) = f(x+z) + (h-z)\, f_1(x+z) + \frac{(h-z)^2}{1.2} f_2(x+z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(h-z)^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} f_{k-1}(x+z) + \varphi(z) ,$$

wo der Kürze wegen

$$\varphi(z) = \frac{(h-z)^k}{1.2.3\ldots k} f_k[x+z + \alpha(h-z)] ,$$

gesetzt worden ist.

Wird in dieser letzten Gleichung $z=o$ angenommen, so hat man:

$$\varphi(o) = \frac{h^k}{1.2.3\ldots k} f_k(x+\alpha h) .$$

Da der Werth von $\varphi(o)$ die Ergänzung zur Taylor'schen Reihe (Gleichung 23) ist, so handelt es sich, diese Größe $\varphi(o)$ auf eine andere, von der hier gegebenen verschiedene Form zu bringen.

Bedenkt man die Willkührlichkeit von z in obiger $f(x+h)$ darstellender Gleichung, so ist man zum Umsetzen dieser Größe in $z+\omega$ berechtigt. Wird von der umgesetzten Gleichung die ursprüngliche abgezogen, und setzt man hierbei ω im Zustande des unendlichen Abnehmens voraus, d. h. differenzirt man obige Gleichung, die $f(x+h)$ giebt, nach z, so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung der abgeleiteten Function von $\varphi(z)$:

$$\varphi_1(z) = -\frac{(h-z)^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} f_k(x+z) .$$

Ferner hat man mit Hülfe des Taylor'schen Theorems (Gl. 23)

$$\varphi(z+i) = \varphi(z) + i\,\varphi_1(z+\beta i) ,$$

wo i endlich und β numerisch kleiner als die Einheit ist, und vermöge der vorhergehenden Gleichung ist auch

$$\varphi_1(z+\beta i) = -\frac{(h-z-\beta i)^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} f_k(x+z+\beta i) ;$$

daher hat man:

$$\varphi\,(z+i) = \varphi\,(z) - \frac{i\,(h-z-\beta i)^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\, f_k\,(x+z+\beta i)\;.$$

Wird hier $i=h-z$ gesetzt, so hat man, da $\varphi\,(h) = o$ ist, folgende Gleichung:

$$\varphi\,(z) = \frac{(h-z)^k\,(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\, f_k\,[x+\beta h+(1-\beta)z]\;,$$

aus welcher für $z=o$ die verlangte Gleichung:

$$\varphi\,(o) = \frac{h^k\,(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\, f_k\,(x+\beta h)\;,$$

hervorgeht. Der Ausdruck rechter Hand vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung, wo β numerisch kleiner als die Einheit gedacht ist, stellt die Ergänzung zur Taylor'schen Reihe unter der angekündigten Form dar. Man kann somit das Taylor'sche Theorem auch durch folgende Gleichung darstellen:

$$f\,(x+h) = f\,(x) + h\,f_1\,(x) + \frac{h^2}{1.2.}\,f_2\,(x) + \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$
$$+ \frac{h^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\,f_{k-1}\,(x) + \frac{h^k\,(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\,f_k\,(x+\beta h)\;. \quad (23')$$

Wird hier $x=o$ und h in x umgesetzt, so kann man das Maclaurin'sche Theorem durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$f\,(x) = f\,(o) + x\,f_1\,(o) + \frac{x^2}{1.2}\,f_2\,(o) + \,.\,.$$
$$+ \frac{x^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\,f_{k-1}\,(o) + \frac{h^k\,(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\,..\,(k-1)}\,f_k\,(\beta x)\;. \quad (24')$$

Bei der Entwickelung vorgelegter Functionen in Reihen, nach der Taylor'schen oder Maclaurin'schen Reihe, kann man mit Hülfe der Ergänzungsglieder Aufschluß über deren Convergenz oder Divergenz erhalten, namentlich dann, wenn die k^te^ Ableitung der Function durch k darstellbar ist; denn versetzt man nun k in den Zustand des unendlichen Wachsens, so ist die Reihe, je nachdem der Grenzwerth des Ergänzungsgliedes gleich oder verschieden von Null ist, eine convergirende oder eine divergirende.

---

§. II.

Ausmittelung der Werthe der Functionen, die $\frac{0}{0}$ werden, und Angabe der Werthe der allgemeinen Größe, die eine Function zu einem Maximum oder Minimum machen.

29. Die abgeleiteten Functionen bewähren ferner ihre Brauchbarkeit in der Analysis, wenn durch Specialisirung des Werthes einer allgemeinen Größe x eine Unbestimmtheit in dem Werthe der Function hervorgeht. Am häufigsten bieten die gebrochenen Functionen solche Unbestimmtheiten dar. Hat man eine gebrochene Function φ (x) durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}, \qquad (\alpha)$$

gegeben, wo f (x) und F (x) beliebige Functionen von x sind, und geht für x = a, f (a) sowol als F (a) in Null über, so hat man:

$$\varphi(a) = \frac{0}{0},$$

und da $\frac{0}{0}$ das Symbol der Unbestimmtheit ist, so bleibt vor der Hand der Werth der Function φ (x) für x = a unbestimmt.

Um diese Art von Unbestimmtheit zu heben, setze man in die Gleichung (α)

$$x = a + \omega,$$

so hat man

$$\varphi(a+\omega) = \frac{f(a+\omega)}{F(a+\omega)}.$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$f(a) = o, \text{ und } F(a) = o,$$

daher hat man, wenn ω im Zustande des unendlichen Abnehmens angenommen wird, folgende Gleichung:

$$\varphi(a) = \frac{f_1(a)}{F_1(a)}.$$

Ist wenigstens eine der Größen f_1 (a) oder F_1 (a) von Null verschieden, dann ist die Unbestimmtheit gehoben; im entgegengesetzten Falle setze man in die letzte Gleichung a + ω statt a, wo ω die vorige Bedeutung hat. Es ergiebt sich alsdann wegen

$$f_1(a) = o, \text{ und } F_1(a) = o,$$

die Gleichung

$$\varphi(a) = \frac{f_2(a)}{F_2(a)}.$$

Allgemein, wenn die letzten für $x=a$ zugleich verschwindenden, abgeleiteten Functionen den Index n tragen, so daß man

$$f(a)=o,\ f_1(a)=o,\ f_2(a)=o,\ \ldots f_n(a)=o;$$
$$F(a)=o,\ F_1(a)=o,\ F_2(a)=o,\ \ldots F_n(a)=o;$$

hat, dann ist:

$$\varphi(a)=\frac{f_{n+1}(a)}{F_{n+1}(a)}.$$

Sind nun Zähler und Nenner dieses Bruches von Null verschieden, oder findet solches wenigstens bei einem dieser Theile Statt, dann ist der Werth von $\varphi(a)$ angebbar.

30. Die Ausmittelung jener Werthe der allgemeinen Größe x, die eine Function f (x) zum Maximum oder Minimum machen, wird ebenfalls mit Zuziehung der abgeleiteten Functionen bedeutend erleichtert, und kann im Allgemeinen als ein gelöstes Problem angesehen werden.

Eine Function f (x) von x ist für irgend einen Werth von x ein Maximum, falls sie, für alle diesem Werthe von x unendlich nahe kommende Werthe, kleiner ausfällt. Hingegen ist eine solche Function für irgend einen Werth der allgemeinen Größe ein Minimum, wenn sie, für alle diesem Werthe von x unendlich nahe liegende Nachbarswerthe, größer ausfällt.

Stellt nun a einen Werth von x dar, welcher die Function f (x) zum Maximum oder Minimum macht, so hat man, dem eben aufgestellten Begriffe nach, im ersten Falle

$$f(a+\omega) < f(a),\ \text{und}\ f(a-\omega) < f(a),$$

und im zweiten Falle

$$f(a+\omega) > f(a),\ \text{und}\ f(a-\omega) > f(a),$$

wo ω eine unendlich klein werdende Größe bedeutet; oder im ersten Falle ist der Werth des Grenzausdruckes

$$\text{Lim}: \{ f(a\pm\omega) - f(a) \},$$

mit dem negativen Zeichen und im zweiten Falle mit dem positiven Zeichen versehen.

Um diesen Werth a zu finden, setzen wir wie überall, wo abgeleitete Functionen zu Lösung eines Problems mitwirken, die Function f (x) in der Umgebung des Werthes a von x mit der Eigenschaft der Continuität begabt voraus. Alsdann hat man:

$$\text{Lim}: \{f(x \pm \omega) - f(x)\} = \pm \omega f_1(x).$$

Wird in dieser identischen Gleichung x=a gesetzt, wo a in der bis jetzt gebrauchten Bedeutung auftritt, so wird das Zeichen des Ausdruckes rechts vom Gleichheitszeichen, falls $f_1(a)$ von Null verschieden ist, vom Factor $\pm\omega$ modificirt werden; der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen muß nach dem Vorhergehenden ein von der Größe $\pm\omega$ unabhängiges Zeichen annehmen: daher sind wir, um diesen Widerspruch zu heben, die Größe a als Wurzel der Gleichung:

$$f_1(x) = o,$$

zu erklären genöthiget; wodurch dann, mit Zuziehung der Taylor'schen Reihe,

$$\text{Lim}: \{f(x \pm \omega) - f(x)\} = \frac{\omega^2}{1.2} f_2(x),$$

erhalten wird.

Ist nun $f_2(x)$, falls x=a gesetzt wird, von Null verschieden und endlich, dann findet obiger Widerspruch nicht mehr Statt, und die Function f(x) ist für x=a ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f_2(x)$ für x=a ein negatives oder positives, reelles Resultat darbietet.

Hat man hingegen außer $f_1(a) = o$ auch $f_2(a) = o$, dann giebt die Taylor'sche Reihe für x=a folgende Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \{f(x \pm \omega) - f(x)\} = \pm \frac{\omega^3}{1.2.3} f_3(x),$$

und dieselben Gründe, die $f_1(a) = o$ anzunehmen geboten, fordern auch die Gleichung:

$$f_3(a) = o,$$

zum Statthaben eines Maximum oder Minimum; wodurch für x=a die Gleichung:

$$\text{Lim}: \{f(x \pm \omega) - f(x)\} = \frac{\omega^4}{1.2.3.4} f_4(x),$$

erhalten wird.

Ist $f_4(a)$ von Null verschieden und endlich, dann ist f(x) für x=a ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f_4(a)$ ein negatives oder positives, reelles Resultat darbietet.

Fährt man auf dem bis jetzt befolgten Wege fort, so gelangt man zu folgender allgemeinen Regel, den Maximum- oder Minimum-Werth einer Function f(x) zu ermitteln.

Man nehme die Ableitung der vorgelegten Function $f(x)$ und setze dieselbe gleich Null. Die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung können, statt x in die Function $f(x)$ gesetzt, derselben größte und kleinste Werthe beilegen.

Diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, die, in $f_2(x)$ statt x eingesetzt, imaginäre oder unendlich große Resultate hervorrufen, sind für den beabsichtigten Zweck undienlich und folglich zu verwerfen; diejenigen Wurzeln ferner, die diese Function $f_2(x)$ auf Null bringen, lassen vorläufig die Frage unentschieden. Jene Wurzeln endlich, die der Function $f_2(x)$ endliche reelle Werthe beilegen, rufen in $f(x)$ ein Maximum oder Minimum hervor, je nachdem das eben erwähnte endliche, reelle Resultat ein negatives oder positives Zeichen trägt.

Um über die unentschieden gebliebenen Wurzeln der Gleichung $f_1(x) = 0$ ein Urtheil zu fällen, bilde man die dritte abgeleitete Function: $f_3(x)$.

Jene dieser unentschiedenen Wurzeln, die dieser Function $f_3(x)$, von Null, verschiedene Werthe beilegen, sind so gleich zu verwerfen; mit den noch übrigen Wurzeln gehe man zur vierten abgeleiteten Function $f_4(x)$ über und verfahre wie bei $f_2(x)$. . ., u. s. w.

Zweites Buch.

Die Integralrechnung.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Ueber die Bedeutung, Bezeichnung und den Werth einer Integralfunction.

31. Diejenige Function von x, die wir durch F(x) bezeichnen, und die auf eine der zwei gleichbedeutenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\text{Lim}:\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}&=\varphi(x)\\ d.\ F(x)&=\varphi(x)\,dx\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

führt, wird eine der Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$ entsprechende Integralfunction oder auch ein Integrale dieser Differenzialfunction genannt.

Die Rechnungsoperation, die zur Erzeugung der Function F(x) aus $\varphi(x)\,dx$ mitwirkt, steht im Gegensatze zu der des Differenzirens und wird Integriren genannt.

Die auszuführende Operation des Integrirens wird durch ein der Differenzialformel vorgesetztes $\int$ angedeutet. Stellt daher $\varphi(x)$ irgend eine Function von x vor, so deutet man die zu suchende Integralfunction der Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$ durch:

$$\int \varphi(x)\,dx\,,$$

an; man hat demnach, beim Statthaben einer der Gleichungen (1), folgende Gleichung:

$$\int \varphi(x)\,dx = F(x)\,.$$

Ist ferner A eine, bei der Aenderung von x, constant bleibende Größe, so hat man auch:

$$d.\ \{F(x) + A\} = d.\ F(x) = \varphi(x)\,dx\ ;$$

daher viel allgemeiner als vorhin:

$$\int \varphi(x)\,dx = F(x) + A\,. \qquad (2)$$

Diese von x unabhängige, völlig willkührliche Größe A wird **Constante der Integration** genannt.

32. Wegen dieser Willkührlichkeit der Constante A ist auch jedesmal ein Werth a für x denkbar, der die Integralfunction auf Null reducirt; setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$o = F(a) + A\,.$$

Es nimmt also die Gleichung (2), vermöge dieser Gleichung, folgende Form an:

$$\int \varphi(x)\,dx = F(x) - F(a)\,.$$

Will man, bei der eben getroffenen Annahme, den Werth der Integralfunction für $x = b$ bestimmen, so wird diese Größe b dem Integralzeichen als Zeiger, oben, und der vorige Werth a in gleicher Eigenschaft, unten, beigesetzt.

Man hat alsdann:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \qquad (3)$$

Dieselbe Ursache, die Willkührlichkeit der Constante der Integration, gestattet auch für $x = b$ die Integralfunction verschwindend vorauszusetzen; wird daher, unter dieser Annahme, der Werth der Integralfunction für $x = a$ verlangt, so hat man folgende Gleichung:

$$\int_b^a \varphi(x)\,dx = F(a) - F(b)\,.$$

Wenn diese Gleichung zur vorhergehenden addirt wird, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\,dx \qquad (4)$$

Gewöhnlich wird der obere Zeiger, dem Werthe nach, größer als der untere angenommen: es lehrt somit diese Gleichung, das Umsetzen dieses Falles in den entgegengesetzten, und umgekehrt.

33. Der Werth der Integralfunction einer Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$ für $x = b$, falls dieselbe für $x = a$ verschwindet, oder der Ausdruck:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

stellt unter Beschränkungen, die wir in der nächst folgenden Nr. besprechen werden, die algebraische Summe der Werthe dar, welche die Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$, beim successiven Uebergange von $x=a$ bis $x=b$, anzunehmen vermag.

Nach dem was in der Differenzialrechnung mitgetheilt worden ist, besteht die erste der Gleichungen (1) der vorhergehenden Nr. für alle Werthe von x, für die F(x) eine continuirliche Function vorstellt; wird nun F(x), von $x=a$ bis $x=b$, als continuirliche Function vorausgesetzt und findet, wenn $b-a$ positiv angenommen wird, der successive Uebergang der Werthe dieser Function von $x=a$ bis $x=b$ durch die unendlich kleinen, positiven Zunahmen von x:

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots\ \omega_{n-1},$$

Statt, deren Anzahl, n, unendlich groß ist; so erhält man, wenn in (1) statt x nach und nach die Werthe:

$$a,\ a+\omega_0,\ a+\omega_0+\omega_1,\ \ldots\ a+\omega_0+\omega_1+\omega_2\ \ldots\ +\omega_{n-2},$$

und statt ω in gleicher Ordnung die Werthe:

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_{n-1},$$

gesetzt werden, folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_0\,\varphi(a) &= \text{Lim:}\,\{F(a+\omega_0)-F(a)\},\\
\omega_1\,\varphi(a+\omega_0) &= \text{Lim:}\,\{F(a+\omega_0+\omega_1)-F(a+\omega_0)\},\\
\omega_2\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1) &= \text{Lim:}\,\{F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2)-F(a+\omega_0+\omega_1)\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega_{n-1}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-2}) &=\\
=\text{Lim:}\,\{F(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-1}) &- F(a+\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_{n-2})\}.
\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt folgende Gleichung:

$$b=a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{n-1} \tag{5}$$

fest, so erhält man:

$$F(b)-F(a)=$$
$$=\omega_0\,\varphi(a)+\omega_1\,\varphi(a+\omega_0)+\omega_2\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\ldots+\omega_{n-1}\,\varphi(b-\omega_{n-1}).$$

Wenn ferner in derselben Gleichung (1) statt x der Reihe nach die Werthe:

$$b,\ b-\omega_{n-1},\ b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2},\ \ldots\ b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}\ \ldots\ -\omega_2-\omega_1,$$

und statt ω, in gleicher Ordnung, die Werthe:

$$-\omega_{n-1}\,,\;-\omega_{n-2}\,,\;-\omega_{n-3}\;\ldots\;-\omega_0$$

eingesetzt werden, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
-\omega_{n-1}\,\varphi(b) &= \text{Lim:}\,\{F(b-\omega_{n-1})-F(b)\}\,,\\
-\omega_{n-2}\,\varphi(b-\omega_{n-1}) &= \text{Lim:}\,\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2})-F(b-\omega_{n-1})\}\,,\\
-\omega_{n-3}\,\varphi(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}) &=\\
= \text{Lim:}\,\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}-\omega_{n-3}) &- F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2})\}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-\omega_0\,\varphi(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}\ldots-\omega_2-\omega_1) &=\\
= \text{Lim:}\,\{F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}\ldots-\omega_1-\omega_0) &- F(b-\omega_{n-1}-\omega_{n-2}\ldots-\omega_1)\}\,.
\end{aligned}\right\}(\alpha^1)$$

Werden auch diese Gleichungen addirt, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (5):

$$F(b)-F(a)=$$
$$=\omega_0\varphi(a+\omega_0)+\omega_1\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\ldots+\omega_{n-2}\varphi(b-\omega_{n-1})+\omega_{n-1}\varphi(b)$$

Man hat daher mit Zuziehung der Gleichung (3) entweder:

$$\int_a^b\varphi(x)dx=$$
$$=\omega_0\varphi(a)+\omega_1\varphi(a+\omega_0)+\omega_2\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\ldots+\omega_{n-1}\varphi(b-\omega_{n-1})\,, \tag{6}$$

oder:

$$\int_a^b\varphi(x)dx=$$
$$=\omega_0\varphi(a+\omega_0)+\omega_1\varphi(a+\omega_0+\omega_1)+\ldots+\omega_{n-2}\varphi(b-\omega_{n-1})+\omega_{n-1}\varphi(b)\,, \tag{7}$$

welche zwei Gleichungen, die Richtigkeit des am Anfange dieser Nr. Ausgesprochenen, am deutlichsten darthun.

Diese Gleichungen sind unter der Annahme $b>a$ gefunden worden; allein bedenkt man die Gleichung (4) der vorhergehenden Nr., so unterliegt der Gebrauch derselben, auch für die entgegengesetzte Annahme $b<a$, keiner weiteren Schwierigkeit.

34. Ein anderer Umstand, der bei der Herstellung dieser Gleichungen mitwirkte, verdient, da im Unterlassungsfalle leicht irrige Ansichten entstehen und falsche Resultate hervorgerufen werden können, besonders erwähnt und beleuchtet zu werden.

Die fraglichen Gleichungen konnten nur unter der Bedingung, daß die Integralfunction der vorgelegten Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$

für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ eine continuirliche bleibt, erhalten werden. In jenen Fällen demnach, in welchen diese Integralfunction angebbar ist, unterliegt auch die Entscheidung über die Zulässigkeit dieser Gleichungen (6) und (7) keiner weitern Schwierigkeit; es reducirt sich alsdann der Zweck der Untersuchung auf die Erlangung der Einsicht: ob diese Integralfunction eines unendlichen Werthes, innerhalb a und b, fähig sei oder nicht; je nachdem der zweite oder erste Fall eintritt, ist auch die Function continuirlich oder discontinuirlich.

Da fast gar keine Schwierigkeiten, hierüber Aufklärung zu erlangen, sich darbieten; so übergehen wir diesen Fall und wenden uns an den schwierigeren: aus der bloßen Differenzialformel $\varphi(x)dx$ die Frage über die Continuität der Integralfunction, innerhalb der Grenzen a und b der Variablen, zu entscheiden.

Betrachtet man mit einiger Aufmerksamkeit die zwei Systeme der Gleichungen (α) und (α^1), so überzeugt man sich sehr bald, daß sämmtliche Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen unendlich klein werdende Zahlenwerthe haben, wenn die zwar unbekannt vorausgesetzte Integralfunction, von $x=a$ bis $x=b$, continuirlich gedacht wird. Hieraus folgt sofort, daß es eine gleiche Bewandtniß mit den Ausdrücken zur Linken der Gleichheitszeichen derselben Gleichungen haben muß. Nun stellen diese Ausdrücke die Glieder der unendlichen Reihen (6) und (7) dar, daher müssen sämmtliche Glieder dieser Reihen, unendlich klein werdende Größen vorstellen.

Jedes Glied dieser zwei Reihen geht aber aus der vorgelegten Differenzialformel $\varphi(x)\,dx$ hervor, indem man in $\varphi(x)$ statt x irgend einen der Werthe von a bis b und statt dx ein diesem Werthe von x entsprechendes, unendlich kleines Increment: $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ setzt; ferner ist auch nach dem ersten Buche Nr. 16. die Function $\varphi(x)$, isolirte Werthe von x ausgenommen, mit der Eigenschaft der Continuität begabt; wenn daher von jenen isolirten Werthen der allgemeinen Größe, die der Function $\varphi(x)$ unendlich große Werthe beilegen, einstweilen abstrahirt wird, so sind sämmtliche Glieder der Reihen in (6) und (7), da jedes derselben mit einem der unendlich klein werdenden Factoren $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$

ω_{n-1} behaftet ist, ebenfalls unendlich klein werdend, und thun demnach der oben gestellten Anforderung ein Genüge.

Es reducirt sich also unsre Untersuchung auf die Betrachtung jener wenigen Fälle, in denen $\varphi(x)$, beim Uebergange von $x=a$ bis $x=b$ unendlich groß wird.

Gesetzt nun, die Function $\varphi(x)$ gehe bei der Annahme:

$$x=a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_k,$$

wo k eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, .. n—1 bedeutet, in den Zustand des unendlichen Großwerdens über; so bleibt, je nachdem die Gleichung (6) oder die Gleichung (7) zu Grunde gelegt wird, der Ausdruck:

$$\omega_{k+1}\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_k), \tag{β}$$

oder der Ausdruck:

$$\omega_k\,\varphi(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_k), \tag{β'}$$

zu untersuchen übrig.

Wenn Null der Grenzwerth eines dieser Ausdrücke ist, dann finden die Gleichungen (6) und (7) Statt; haben dagegen diese Ausdrücke endliche oder unendlich großwerdende Grenzwerthe, dann ist man mit gleicher Sicherheit anzunehmen berechtiget, daß die unbekannte Integralfunction, bei

$$x=a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_k,$$

eine Unterbrechung in der Continuität erleidet; daher dann sämmtliche in der Differenzialrechnung gewonnenen Resultate, namentlich die Fundamentalgrenzgleichung (1) Nr. 16 und in Folge derselben auch die Gleichungen (6) und (7), sowohl für diesen Werth von x, als in der nächsten Umgebung desselben, unstatthaft und für weitere Folgerungen als unbrauchbar anzusehen sind.

35. Nachdem alles Nöthige, über das Statthaben der Gleichungen (6) und (7) mitgetheilt worden ist, wollen wir einige in der Integralrechnung übliche Benennungen, die eine Folge dieser Gleichungen sind, hier noch aufnehmen.

Die Größen a und b bestimmen die Endglieder der Reihen rechter Hand der Gleichheitszeichen in (6) und (7); diese Reihen bestimmen den Werth des Integrals $\int_a^b \varphi(x)\,dx$; daher werden diese Größen a und b die Grenzen des Integrals der Differenzial-

formel $\varphi(x)\,dx$ genannt, und zwar nennt man b die **obere** und a die **untere Grenze**.

Es entsprechen ferner die Glieder dieser Reihen allen Werthen der zu integrirenden Function $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$, daher sagt man auch: **der Ausdruck** $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ **oder dessen Werth stellt das Integrale von** $x=a$ **bis** $x=b$ **dar.**

Aus dem Grunde endlich, daß man unter a und b jedesmal bestimmte gegebene Zahlenwerthe versteht, nennt man auch den Ausdruck $\int_a^b \varphi(x)dx$ ein **bestimmtes Integrale**, zum Gegensatze eines Integrals überhaupt, das ohne Grenzen dasteht und **unbestimmtes Integrale** genannt wird.

36. Noch einige Gleichungen, die sehr oft in der Folge zur Anwendung kommen werden, wollen wir aus (6) und (7) ableiten und hier aufstellen.

Stellt α eine zwischen a und b liegende Zahlengröße vor, wo man:

$$a < \alpha < b ,$$

hat, so führen die Gleichungen (6) und (7), beim Statthaben derselben, auf folgende Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^\alpha \varphi(x)\,dx + \int_\alpha^b \varphi(x)\,dx . \qquad (8)$$

Wird ferner in denselben Gleichungen,

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{n-1} = \omega ,$$

angenommen, so giebt zuerst die Gleichung (5):

$$\omega = \frac{b-a}{n} ,$$

und man hat:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \omega \left\{ \varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+3\omega) \;\ldots +\varphi(b-\omega) \right\} , (9)$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \omega \left\{ \varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+3\omega) \ldots + \varphi(b-\omega)+\varphi(b) \right\} . (10)$$

Von den eben aufgestellten zwei Gleichungen die Summe genommen, hat man auch:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \omega \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+ \ldots +\varphi(b-\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b) \right\} \quad (11)$$

Die letzten Gleichungen erklären am besten die Anwendung des Anfangsbuchstaben $\int$ von Summe zur Bezeichnung einer auszuführenden Integrationsoperation.

Zweites Kapitel.

Ueber die verschiedenen Methoden unbestimmte Integralfunctionen darzustellen.

§. I.

Aufstellung der Grundgleichungen.

37. Das Integriren, als Gegensatz zum Differenziren, findet, wie natürlich, den ersten und wesentlichsten Anhaltspunkt in der Differenzialrechnung selbst. Wie wir bereits im vorhergehenden Kapitel Nr. 32 und 33 wahrgenommen haben und wie die Folge auch mehrfach darthun wird, geben die Resultate der Differenzialrechnung die Hauptstützen bei allen Untersuchungen im weiten Gebiete der Integralrechnung ab; daher wird es auch gut sein, ehe zur Auseinandersetzung der verschiedenen Methoden des Integrirens übergegangen wird, jene Hülfsgleichungen und Integralfunctionen, die eine Folge dieses Begriffes sind oder die aus den in der Differenzialrechnung gewonnenen Resultaten unmittelbar fließen, unter der Benennung Grundgleichungen hier zusammenzustellen, um mit gelegentlicher Berufung auf dieselben ungehindert, in der Entwicklung der verschiedenen Integrationsmethoden, fortfahren zu können.

38. Zufolge des Begriffes einer inversen Operation hat man, wenn f(x) irgend eine Function von x bedeutet, die Gleichung:

$$\int d.\ f(x) = f(x)\ . \tag{1}$$

Stellt ferner a eine von x unabhängige Größe vor, so hat man mit Zuziehung dieser Gleichung und der Gleichung (5) Nr. 18

$$\int a\ d.\ f(x) = a \int d.\ f(x) = a\ f(x)\ . \tag{2}$$

Ebenso geben die Gleichungen (6), (14) und (15) der Differenzialrechnung:

$$\int \{d.\ f(x) \pm d.\ F(x)\} = \int d.\ f(x) \pm \int d.\ F(x)\ , \tag{3}$$

$$\int F(x)\ d.\ f(x) + \int f(x)\ d.\ F(x) = f(x)\ F(x)\ , \tag{4}$$

$$\int \frac{d.f(x)}{F(x)} - \int \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{d.F(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{F(x)}, \qquad (5)$$

wo F(x) und f(x) beliebige Functionen von x sind.

Die Ergebnisse der fünf letzten Gleichungen wollen wir auf die zwei Functionen:

$$x^m \text{ und } a^x,$$

anwenden, aus welchen die algebraischen und exponentiellen Functionen fließen.

Wendet man auf die Gleichungen (I) und (II) Nr. 19 die Resultate der eben aufgestellten Gleichungen (1) und (2) an, so hat man:

$$x^m = m \int x^{m-1}\, dx,$$

$$a^x = \log.a. \int a^x\, dx.$$

Soll die willkührliche Constante der Integration Nr. 31, hier und in der Folge, durch + Const. oder durch + C. vorgestellt werden, dann gehen die beiden letzten Gleichungen über in:

$$\int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m} + \text{Const.}, \qquad (I)$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log.a} + \text{Const.}, \qquad (II)$$

welche die Grundgleichungen zu den algebraischen und exponentiellen Integralfunctionen abgeben.

Die einfache Bemerkung, daß diese Gleichungen ($m=0$ und $a=1$ ausgenommen) identisch bestehen, versetzt uns so gleich in die Lage die Werthe einiger Integralausdrücke abzuleiten, die wir, um sie von den Grundgleichungen zu unterscheiden, abgeleitete Grundgleichungen nennen werden.

39. Die Gleichung (7) Nr. 18 giebt, mit Zuziehung der hier aufgestellten Grundgleichung (1),

$$\int f_1[\varphi(x)]\varphi_1(x)\, dx = f[\varphi(x)] + \text{Const.}, \qquad (6)$$

wo $\varphi_1(x)$ den Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x und $f_1[\varphi(x)]$ den Differenzialquotienten von $f[\varphi(x)]$ nach $\varphi(x)$ vorstellt. Mit Berücksichtigung dieser Gleichung ist man, in den Gleichungen (I) und (II), jede Function von x statt x zu setzen berechtiget, wenn nur zugleich statt dx das Differenziale dieser Function eingesetzt wird.

Wird daher in (I) statt x die Function $a + bx^n$ gesetzt, so hat

man, wenn a, b und n von x unabhängig gedacht werden, $bnx^{n-1}dx$ statt dx zu setzen und es ergiebt sich folgende abgeleitete Grundgleichung:

$$\int (a+bx^n)^{m-1}\, x^{n-1}\, dx = \frac{1}{mnb}(a+bx^n)^m + \text{Const.} \tag{7}$$

Wir haben hier statt $+\frac{\text{Const.}}{nb}$ einfach + Const. gesetzt, wozu wir vermöge der Willkührlichkeit der Constante der Integration berechtiget sind. Aus gleichem Grunde werden wir auch in der Folge, jede mögliche Verbindung oder Function der Integrationsconstante, einfach durch + Const. oder + C. andeuten.

Setzt man ferner in dieselbe Gleichung (I) $b + \frac{a}{x^n}$ statt x also $-na\frac{dx}{x^{n+1}}$ statt dx, so erhält man die zweite abgeleitete Grundgleichung:

$$\int (a+bx^n)^{m-1}\, x^{-(mn+1)}\, dx = -\frac{1}{mna}\cdot\frac{(a+bx^n)^m}{x^{mn}} + \text{Const.} \tag{8}$$

40. Die Grundgleichung (II) wollen wir gleichfalls zur Herstellung einiger abgeleiteten Grundgleichungen benützen.

Wird daselbst a = e (Einleitung Nr. 9) angenommen, so hat man:

$$\int e^x\, dx = e^x + \text{Const.} \tag{9}$$

Geht hier x in xi also dx in idx über, dann ist:

$$\int e^{xi}\, dx = \frac{e^{xi}}{i} + \text{Const.}\ ,$$

und man hat, wenn $i = \sqrt{(-1)}$ angenommen wird,

$$\int \text{Cos.}x\, dx + \sqrt{-1}\int \text{Sin.}x\, dx = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{Cos.}x + \text{Sin.}x + \text{Const.}$$

Vertauscht man hier x in −x also dx in −dx, so ist:

$$-\int \text{Cos.}x\, dx + \sqrt{-1}\int \text{Sin.}x\, dx = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{Cos.}x - \text{Sin.}x + \text{Const.}$$

Durch Addition und Subtraction dieser zwei Gleichungen findet man endlich folgende zwei abgeleitete Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int \text{Sin.}x\, dx &= -\,\text{Cos.}x + \text{Const.}\ ,\\ \int \text{Cos.}x\, dx &= +\,\text{Sin.}x + \text{Const.}\ ,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

die sich auch, aus den Gleichungen (10) Nr. 20, mit einfacher Zu-

ziehung der Grundgleichung (1) folgern lassen. Auf demselben Wege oder, einfacher, aus den Gleichungen (9) und (11) Nr. 20 findet man auch folgende abgeleitete Grundgleichungen:

$$\int \frac{dx}{x} = \log.x + \text{Const.}\ , \qquad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}x + \text{Const.} \qquad (12)$$

Die hier aufgestellten Grundgleichungen werden, bei Gelegenheit der Auseinandersetzung der verschiedenen Integrationsmethoden, die Grundlage zur Aufstellung der wichtigsten algebraischen und exponentiellen Integralfunctionen abgeben.

---

§. II.

Das Integriren nach der Ableitungsmethode.

41. Der im vorhergehenden §. Nr. 39 und 40 befolgte Gang, die abgeleiteten Grundgleichungen zu erhalten, ruft eine Integrationsmethode hervor, die man Ableitungsmethode nennen kann; es beruht dieselbe auf die, zwischen Integralausdruck und Integralfunction, stattfindende Identität.

Die Bildung der Gleichung (6) Nr. 39 aus der folgenden:

$$\int f_1(x)\,dx = f(x) + \text{Const.}\ ,$$

durch die Annahme des Ueberganges von x in $\varphi(x)$ und von dx in $d.\varphi(x) = \varphi_1(x)\,dx$, umfaßt alle Eigenthümlichkeiten derselben und bietet uns genügenden Aufschluß, dieselbe zu gebrauchen, dar.

Wir gehen daher zur Anwendung dieser Methode auf die Darstellung verschiedener Integralausdrücke über und versparen die etwa noch nöthigen Bemerkungen auf gelegentliche Mittheilung.

42. Geht in der Gleichung (11) x in a + bx, also dx in bdx über, so hat man:

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log.(a+bx) + \text{Const.} \qquad (13)$$

Wird hier + b in — b umgesetzt, dann hat man:

$$\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} \log.(a-bx) + \text{Const.} ;$$

durch Addition der beiden letzten Gleichungen findet man:

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \log. \frac{a+bx}{a-bx} + \text{Const.} \qquad (14)$$

Geht in dieser Gleichung x in $x\sqrt{(-1)}$, also dx in $\sqrt{(-1)}\,dx$ über, oder wird $b\sqrt{(-1)}$ statt b gesetzt und berücksichtiget man die Gleichung:

$$\text{arc.tang.} \frac{bx}{a} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{a+bx\sqrt{-1}}{a-bx\sqrt{-1}} ,$$

so ergiebt sich die Gleichung:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab} \text{arc.tang.} \frac{b}{a} x + \text{Const.} \qquad (15)$$

Durchs Addiren und Subtrahiren der Gleichungen (14) und (15) erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^4-b^4x^4} &= \frac{1}{2a^3b} \left\{\log. \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} + \text{arc.tang.} \frac{b}{a} x \right\} + C. \\ \int \frac{x^2dx}{a^4-b^4x^4} &= \frac{1}{2ab^3} \left\{\log. \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} - \text{arc.tang.} \frac{b}{a} x \right\} + C. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

43. Die abgeleitete Grundgleichung (12) giebt, wenn x in $x\sqrt{(-1)}$ also dx in $\sqrt{(-1)}\,dx$ umgesetzt und die identische Gleichung,

$$\text{arc.Sin.}x\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \log.(x+\sqrt{1+x^2}) ,$$

zugezogen wird, folgende Gleichung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log.(x+\sqrt{1+x^2}) + \text{Const.}$$

Wenn daher sowohl in der Gleichung (12), als in der eben aufgestellten Gleichung x in $\frac{b}{a} x$, also dx in $\frac{b}{a} dx$ umgesetzt wird, ergeben sich folgende zwei allgemeine Gleichungen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b} \text{arc.Sin.} \frac{b}{a} x + \text{Const.} , \qquad (17)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b} \log.(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}) + \text{Const.} \qquad (18)$$

44. Wenn ferner in den Gleichungen (14) und (17) x in $x-c^2$ umgesetzt wird und in (14):

$$a^2-b^2c^4 = \alpha \ , \ 2b^2c^2 = \beta \ , \ b^2 = -\gamma \ ,$$

dagegen in (17):

$$a^2 - b^2 c^4 = \alpha \text{ , } 2b^2 c^2 = \beta \text{ , } b^2 = \gamma \text{ ,}$$

angenommen wird, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}} \log. \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-\beta-2\gamma x}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+\beta+2\gamma x} + \text{Const.}, \quad (19)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{arc.Sin.} \frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}} + \text{Const.} \quad (20)$$

Auf gleiche Weise gehen die Gleichungen (15) und (18), wenn x in $x+c^2$ und

$$a^2+b^2 c^4 \text{ in } \alpha \text{ , } 2b^2 c^2 \text{ in } \beta \text{ , und } b^2 \text{ in } \gamma \text{ ,}$$

umgesetzt wird, in folgende zwei Gleichungen über:

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \text{arc.tang.} \frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} + \text{Const.} \text{ ,} \quad (21)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log.(\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}) + \text{Const.} \quad (22)$$

Je nachdem $\beta^2-4\alpha\gamma$ positiv oder negativ ausfällt, wird man, um das Integrale:

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} \text{ ,}$$

unter reeller Form dargestellt zu erhalten, die Gleichung (19) oder die Gleichung (21) zu Grunde legen.

Blos der Fall wenn man $\beta^2-4\alpha\gamma=o$ hat, erscheint durch keine dieser zwei Gleichungen gelöst.

In diesem Falle geht der erwähnte Integralausdruck über in:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{\alpha} \pm x\sqrt{\gamma})^2} \text{ ,}$$

setzt man nun in die abgeleitete Grundgleichung (7):

$$a = \sqrt{\alpha} \text{ , } \quad b = \pm\sqrt{\gamma} \text{ , } \quad n = 1 \text{ , } \quad m = -1 \text{ ,}$$

so hat man:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{\alpha} \pm x\sqrt{\gamma})^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha} \pm x\sqrt{\gamma}} + \text{Const.} \quad (23)$$

Somit erscheint der besagte Integralausdruck, wenn nur $\alpha, \beta, \gamma,$ reelle Größen sind, immer durch eine reelle Integralfunction ausgedrückt. Eben so wird das Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \text{ ,}$$

unter reeller Form durch die Gleichung (20) oder durch die Gleichung (22) dargestellt, je nachdem γ eine negative oder positive Größe ist; blos dann, wenn dieses Integrale keines reellen Werthes fähig ist, stellt sich auch dessen Integralfunction unter imaginärer Form dar.

In der That, da die Buchstaben α, β, γ hier als reelle Größen gedacht werden, so kann blos die Gleichung (20) eine Imaginarität darbieten und zwar nur dann, wenn $4\alpha\gamma+\beta^2$ einen negativen Werth annimmt.

Allein es ist:

$$\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-(\beta-2\gamma x)^2} \;;$$

wenn also $4\alpha\gamma+\beta^2$ einen negativen Werth hat, dann ist, wie diese Gleichung zeigt, $\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}$ für keinen Werth von x reell; weßwegen auch alsdann das fragliche Integrale unter keiner reellen Form darstellbar sein kann.

Es erübriget uns somit noch der Fall, wenn man $\gamma=0$, oder wenn man das Integrale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}},$$

zu bestimmen hat.

Der Werth dieses Integrals geht ebenfalls aus der abgeleiteten Grundgleichung (7) durch die Annahme:

$$a=\alpha,\quad b=\beta,\quad n=1,\quad m=\tfrac{1}{2},$$

hervor, wo man dann

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta x} + \text{Const.}\,, \tag{24}$$

findet.

Diese Gleichung füllt in gleicher Weise die Lücke aus, welche die Gleichungen (20) und (22) lassen, wie es die Gleichung (23) für die Gleichungen (19) und (21) thut.

45. Läßt man in den Gleichungen (20), (22) und (24) x in $\frac{1}{x}$ also dx in $-\frac{dx}{x^2}$ übergehen, und vertauscht hierauf α mit γ und γ mit α, so gehen folgende drei Gleichungen hervor:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc.Sin.}\,\frac{\beta x-2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}} + \text{Const.}\,, \tag{25}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log.\left(\frac{2\alpha+\beta x-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x}\right) + C., \quad (26)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}} = -\frac{2}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{\beta+\gamma x}}{\sqrt{x}} + \text{Const.} \quad (27)$$

46. Setzen wir ferner in die Gleichungen (25) und (26) $1+x$ statt x, und lassen in der aus (25) erzeugten Gleichung,

$$\alpha \text{ in } -\alpha^1+\beta^1-\gamma^1, \quad \beta \text{ in } \beta^1-2\gamma^1, \quad \gamma \text{ in } \gamma^1,$$

und in der aus (26) hervorgegangenen Gleichung,

$$\alpha \text{ in } \alpha^1-\beta^1+\gamma^1, \quad \beta \text{ in } \beta^1-2\gamma^1, \quad \gamma \text{ in } \gamma^1,$$

übergehen, so erhalten wir:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{v^1}} \text{arc.Sin.} \frac{A^1-C^1x}{(1+x)\sqrt{\beta^{12}-4\alpha^1\gamma^1}} + C.,$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-v^1}} \lg.\left(\frac{A^1-C^1x-2\sqrt{-v^1}\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}}{1+x}\right) + C.$$

wo, der Kürze wegen,

$$A^1 = 2\alpha^1-\beta^1, \quad C^1 = 2\gamma^1-\beta^1,$$
$$v^1 = -\alpha^1+\beta^1-\gamma^1,$$

gesetzt worden ist.

Bedenkt man ferner die Gleichung:

$$\text{arc.Sin.}\, u = \text{arc.tang.} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

so kann man folgende Gleichung statt der ersten der zwei obigen Integralgleichungen setzen:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{v^1}} \text{arc.tang.} \frac{1}{2}\frac{A^1-C^1x}{\sqrt{v_1}\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}} + C.$$

Wird in dieser und in der zweiten der beiden obigen Integralgleichungen,

$$x \text{ in } \frac{b}{a}x, \text{ also } dx \text{ in } \frac{b}{a}dx,$$

$$\alpha^1 \text{ in } \frac{\alpha}{a^2}, \quad \beta^1 \text{ in } \frac{\beta}{ab}, \quad \gamma^1 \text{ in } \frac{\gamma}{b^2},$$

umgesetzt, so hat man, wenn noch der Kürze wegen,

$$\left.\begin{aligned} A = 2\alpha b-\beta a, \quad C = 2\gamma a-\beta b, \\ v = -\alpha b^2+\beta ab-\gamma a^2, \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

gesetzt wird, folgende zwei Integralgleichungen:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{v}} \text{arc.tang.} \frac{A-Cx}{2\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + C. \quad (29)$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-v}} \log. \frac{A-Cx-2\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{a+bx} + C \quad (30)$$

Je nachdem die Größe v positiv oder negativ ist, wird man sich der Gleichung (29) oder der Gleichung (30) bedienen.

Ist hingegen $v = o$, dann verwandelt sich das Integrale links vom Gleichheitszeichen dieser Gleichungen in:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma}{b}x}}.$$

Um den Werth dieses Integrals zu bestimmen, setze man in die Gleichung (27) $1+\frac{b}{a}x$ statt x, vertausche $\frac{\gamma b}{a}$ in $\frac{\gamma}{b}$ und $\beta+\gamma$ in $\frac{\alpha}{a}$, wodurch man,

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma}{b}x}} = -\frac{2ab}{\alpha b^2-\gamma a^2}\cdot\sqrt{\frac{\frac{\alpha}{a}+\frac{\gamma}{b}x}{a+bx}} + C., \quad (31)$$

erhält.

47. Wird in den Gleichungen (28), (29) und (30) der vorhergehenden Nr. $\beta = o$ angenommen, und der Kürze wegen,

$$v = \alpha b^2 + \gamma a^2, \quad (32)$$

gesetzt, so hat man:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-v}} \text{ arc.tang. } \frac{\alpha b - \gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C.,$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{v}} \log. \frac{\alpha b-\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{a+bx} + C.$$

Wenn hier x in $-x$ übergeht, hat man:

$$\int \frac{dx}{(a-bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-v}} \text{ arc.tang. } \frac{\alpha b+\gamma ax}{\sqrt{-v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C.,$$

$$\int \frac{dx}{(a-bx)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{v}} \log. \frac{\alpha b+\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{a-bx} + C.$$

Durch Addition der ersten und dritten, wie der zweiten und vierten dieser Gleichungen, erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{2a\sqrt{-v}} \text{ arc.tang. } \frac{2a\sqrt{-v}\; x\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+(\alpha b^2+2\gamma a^2)x^2} + C.,$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{2a\sqrt{v}} \log. \frac{(\alpha b-\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2})(a-bx)}{(\alpha b+\gamma ax-\sqrt{v}\sqrt{\alpha+\gamma x^2})(a+bx)} + C.$$

Diese zwei Gleichungen können, wie folgt, bedeutend vereinfacht werden.

I. Bedenkt man folgende Gleichheit:

$$\text{arc.tang.} \frac{2u}{1-u^2} = 2 \,\text{arc.tang.}u ,$$

und setzt man:

$$u = \frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} ,$$

wo v den Werth aus der Gleichung (32) hat, so findet man:

$$\frac{2u}{1-u^2} = \frac{2a\sqrt{-v}\;\; x\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+(\alpha b^2+2\gamma a^2)x^2} ,$$

und es geht die erste der besagten Gleichungen über in:

$$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{-v}} \,\text{arc.tang.} \frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C. \tag{33}$$

II. Setzt man in die zweite obiger Gleichungen $-b$ statt $+b$, addirt dieselbe zu der so erhaltenen umgeformten Gleichung, so erhält man folgende Gleichung:

$$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{4a\sqrt{v}} \log. \frac{\alpha a^2+Bx^2+2a\sqrt{v}\;\; x\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{\alpha a^2+Bx^2-2a\sqrt{v}\;\; x\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C.,$$

wo der Kürze wegen,

$$B = \alpha b^2 + 2\gamma a^2 ,$$

angenommen worden ist.

Bedenkt man nun die Gleichung:

$$A \pm \sqrt{C} = \left(\sqrt{\frac{A+D}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-D}{2}}\right)^2 ,$$

wo

$$D = \sqrt{A^2 - C} ,$$

ist, so geht obige Gleichung in folgende, höchst einfache Gleichung über:

$$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} = \frac{1}{2a\sqrt{v}} \log. \frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + C. \tag{34}$$

Man wird sich der Gleichung (33) oder der Gleichung (34) bedienen, je nachdem die Größe v, aus Gleichung (32), einen negativen oder einen positiven Werth hat.

48. Stellen wir die Gleichungen (33) und (34) in allen möglichen Combinationen der Zeichen von α und γ, die noch reelle Resultate gewärtigen lassen, hier zusammen; so ruft die Gleichung (33) folgende drei Gleichungen hervor:

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{-v}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\alpha)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{-v_1}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{-v_1}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C., \qquad (\beta)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{v_1}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{v_1}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\gamma)$$

wo v die Bedeutung aus (32) hat und

$$v_1=\alpha b^2-\gamma a^2, \qquad (35)$$

ist. Die Gleichung (34) bietet dann folgende Gleichungen dar:

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{v}}\log.\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\delta)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{v_1}}\log.\frac{x\sqrt{v_1}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v_1}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.; \qquad (\varepsilon)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2-b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{-v_1}}\log.\frac{x\sqrt{-v_1}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v_1}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C. \qquad (\zeta)$$

Werden α und γ als positive Größen angesehen, dann kann über den Gebrauch der drei vorhergehenden oder der drei so eben aufgestellten Gleichungen, um reelle Resultate zu erhalten, kein weiterer Zweifel mehr vorwalten.

Setzt man ferner in den sechs letzten Gleichungen b in $b\sqrt{-1}$ um, so hat man:

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{v_1}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{v_1}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\alpha^1)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{v}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C., \qquad (\beta^1)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{a\sqrt{-v}}\text{ arc.tang. }\frac{x\sqrt{-v}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\gamma^1)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{-v_1}}\log.\frac{x\sqrt{-v_1}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-v_1}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C., \qquad (\delta^1)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{-v}}\log.\frac{x\sqrt{-v}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{-v}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C., \qquad (\varepsilon^1)$$

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{2a\sqrt{v}}\log.\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C. \qquad (\zeta^1)$$

Auch hier wird über den Gebrauch dieser Gleichungen, wenn α und γ wie oben positiv gedacht werden, kein Zweifel mehr stattfinden.

49. Wird die in der vorigen Nr. getroffene Annahme, über die Beschaffenheit der Zeichen von α und γ, beibehalten; so wird, wenn nur a und b reell vorausgesetzt werden, die Größe v der Gleichung (32) positiv sein.

Setzen wir nun diese Annahme fest, wie jene, es habe auch die Größe v_1 der Gleichung (35) einen positiven Werth, oder man habe:

$$\alpha b^2 > \gamma a^2\,,$$

so erhält man durch Addition und Subtraction der Gleichungen

(δ) und (α^1), (ε) und (β^1), (γ) und (ζ^1),

folgende sechs neue Gleichungen:

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}\log.\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{2a^3\sqrt{v_1}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x\sqrt{v_1}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.\,, \qquad (36)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v}}\log.\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}$$
$$-\frac{1}{2ab^2\sqrt{v_1}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x\sqrt{v_1}}{a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C.\,, \qquad (37)$$

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v_1}}\log.\frac{x\sqrt{v_1}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v_1}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{2a^3\sqrt{v}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.\,, \qquad (38)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{v_1}}\log.\frac{x\sqrt{v_1}+a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}{x\sqrt{v_1}-a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}$$
$$-\frac{1}{2ab^2\sqrt{v}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x\sqrt{v}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C.\,, \qquad (39)$$

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{v}}\log.\frac{x\sqrt{v}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{v}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{2a^3\sqrt{v_1}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{x\sqrt{v_1}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C.\,, \qquad (40)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{\upsilon}}\log.\frac{x\sqrt{\upsilon}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\upsilon}+a\sqrt{-a+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{2ab^2\sqrt{\upsilon_1}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{\upsilon_1}}{a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C. \qquad (41)$$

Ist hingegen υ_1 negativ, oder hat man:

$$\alpha b^2 < \gamma a^2 ,$$

dann findet man durchs Addiren und Subtrahiren der Gleichungen:

(δ) und (δ^1) , (β) und (β^1) , (ζ) und (ζ^1) ,

folgende sechs Gleichungen, welche in diesem Falle die vorhergehenden ersetzen:

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{\upsilon}}\log.\frac{x\sqrt{\upsilon}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\upsilon}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{-\upsilon_1}}\log.\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-\upsilon_1}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C. , \qquad (42)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{\upsilon}}\log.\frac{x\sqrt{\upsilon}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\upsilon}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{4ab^2\sqrt{-\upsilon_1}}\log.\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-\upsilon_1}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}+C. , \qquad (43)$$

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2a^3\sqrt{-\upsilon_1}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{2a^3\sqrt{\upsilon}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{\upsilon}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C. , \qquad (44)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}=\frac{1}{2ab^2\sqrt{-\upsilon_1}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}$$
$$-\frac{1}{2ab^2\sqrt{\upsilon}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{\upsilon}}{a\sqrt{\alpha-\gamma x^2}}+C. , \qquad (45)$$

$$\int\frac{dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4a^3\sqrt{-\upsilon_1}}\log.\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-\upsilon_1}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\upsilon}}\log.\frac{x\sqrt{\upsilon}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\upsilon}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C. , \qquad (46)$$

$$\int\frac{x^2dx}{(a^4-b^4x^4)\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}=\frac{1}{4ab^2\sqrt{-\upsilon_1}}\log.\frac{x\sqrt{-\upsilon_1}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{-\upsilon_1}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}$$
$$+\frac{1}{4ab^2\sqrt{\upsilon}}\log.\frac{x\sqrt{\upsilon}-a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\upsilon}+a\sqrt{-\alpha+\gamma x^2}}+C. \qquad (47)$$

§. III.

Integrationsmethode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution.

50. Die Methode des Integrirens durchs Zurückführen besteht im Allgemeinen darin, daß eine vorgelegte Differenzialformel $\varphi(x)dx$, deren Integralfunction nicht so leicht zu erkennen ist, in eine minder complicirte, das Integrale bald verrathende Form umgesetzt wird. Erzweckt man dieses Zurückführen durch die Substitution irgend einer Function einer neuen Variablen y statt der alten x, z. B. durch die Annahme:

$$x = f(y) \text{ also } dx = f_1(y)dy \;,$$

wodurch die obige Differenzialformel $\varphi(x)dx$ in $\varphi[f(y)]f_1(y)dy$ übergeht, und ist die Function f(y) von der Beschaffenheit, daß zum letzten Differenzialausdruck in y leicht ein Integrale erkannt wird; so nennt man dieses Verfahren: Integriren nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution. Denn, hat man die Differenzialformel in y integrirt, und nach vollzogener Integration die Variable x, mittelst obiger Gleichung, wiederum eingeführt; so erhält man, gestützt auf das in vorhergehendem §. entwickelte Integrationsverfahren, das Integrale der vorgelegten Differenzialformel in x.

In dem Folgenden werden wir uns abwechselnd, theils dieser und theils der Ableitungsmethode bedienen, um die Werthe einiger noch nicht aufgeführten Integralausdrücke herzustellen.

51. Es sei:

$$u = \int \frac{xdx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} \,.$$

Wird hier,

$$x = y - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma} \,,$$

gesetzt, so kann man u von den Werthen zweier Integralien abhängig machen, die aus dem Vorausgeschickten theils unmittelbar entlehnt und theils ohne Mühe abgeleitet werden können. Man hat nämlich durch diese Substitution, da dx = dy wird, folgende Gleichung:

$$u = 4\gamma \int \frac{ydy}{4\alpha\gamma - \beta^2 + 4\gamma^2 y^2} - 2\beta \int \frac{dy}{4\alpha\gamma - \beta^2 + 4\gamma^2 y^2} \,. \qquad (\alpha)$$

Vertauscht man in der Gleichung (13) Nr. 42,

$$x \text{ in } y^2 \text{ also } dx \text{ in } 2ydy\,,$$

$$a \text{ in } 4\alpha\gamma-\beta^2 \text{ und } b \text{ in } 4\gamma^2\,,$$

so hat man:

$$\int\frac{ydy}{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}=\frac{1}{8\gamma^2}\log.(4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2)+C.\,,$$

die Gleichungen (14) und (15) geben, je nachdem $4\alpha\gamma <$ oder $>$ β^2 ist, entweder:

$$\int\frac{dy}{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}=\frac{1}{4\gamma\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\log.\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-2\gamma y}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+2\gamma y}+C.$$

oder:

$$\int\frac{dy}{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}=\frac{1}{2\gamma\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\text{arc.tang.}\frac{2\gamma y}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}+C.$$

Werden nun diese Ergebnisse in die Gleichung (α) eingesetzt, und nachher,

$$y=x+\frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma}\,,$$

gesetzt, so erhält man, wenn der Kürze wegen,

$$v=\beta^2-4\alpha\gamma\,, \tag{48}$$

angenommen wird, folgende Gleichungen:

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}\log.(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$$

$$+\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{v}}\log.\frac{1+\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{v}}}{1-\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{v}}}+C.\,, \tag{49}$$

$$\int\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1}{2\gamma}\log.(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$$

$$-\frac{\beta}{\gamma\sqrt{-v}}\text{arc.tang.}\frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{-v}}+C. \tag{50}$$

Man wird sich der ersten oder der zweiten dieser Gleichungen bedienen, je nachdem v aus Gleichung (48) einen positiven oder negativen Werth hat.

Für $v=o$ hat man folgende Gleichung statt der vorgelegten:

$$u=\int\frac{xdx}{(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})^2}\,.$$

Wird hier,

$$\sqrt{\alpha} \pm x\sqrt{\gamma} = y\,,$$

gesetzt, so ist:

$$u = \frac{1}{\gamma}\int\frac{dy}{y} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma}\int\frac{dy}{y^2}\,.$$

Diese Integralien werden nach den Grundgleichungen (11) und (1) bestimmt, so daß man hat:

$$u = \frac{1}{\gamma}\log.\, y + \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma}\,.\,\frac{1}{y} + \text{Const.}$$

Führt man wieder x ein, so ist:

$$\int\frac{x\,dx}{(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})^2} = \frac{1}{\gamma}\log.\,(\sqrt{a}\pm x\sqrt{\gamma})$$
$$+ \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})} + \text{Const.} \qquad (51)$$

52. Aus den Gleichungen (49) und (50) wird man nach der Methode der Ableitung auf einige nicht uninteressante Resultate geführt. Geht, nach dem Geiste dieser Methode, in diesen Gleichungen x in $\frac{1}{x}$ also dx in $-\frac{dx}{x^2}$ über, so verwandeln sie sich in:

$$\int\frac{dx}{\gamma x+\beta x^2+\alpha x^3} = \frac{1}{2\gamma}\log.\,\frac{\gamma+\beta x+\alpha x^2}{x^2}$$
$$+ \frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\upsilon}}\log.\,\frac{1+\dfrac{2\gamma+\beta x}{x\sqrt{\upsilon}}}{1-\dfrac{2\gamma+\beta x}{x\sqrt{\upsilon}}} + \text{Const.},$$

$$\int\frac{dx}{\gamma x+\beta x^2+\alpha x^3} = \frac{1}{2\gamma}\log.\,\frac{\gamma+\beta x+\alpha x^2}{x^2}$$
$$- \frac{\beta}{\gamma\sqrt{-\upsilon}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{2\gamma+\beta x}{x\sqrt{-\upsilon}} + \text{Const.}$$

Setzt man hier x in $x+\delta$ um, setzt dann:

$$\alpha = d\,,\quad \beta = c-3\delta d\,,\quad \gamma = b-2\delta c+3\delta^2 d\,, \qquad (52)$$

und bestimmt dann δ aus der cubischen Gleichung:

$$d\delta^3 - c\delta^2 + b\delta - a = o\,, \qquad (53)$$

so hat man:

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2+dx^3} = \frac{1}{2\gamma} \log. \frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(\delta+x)^3}$$

$$+ \frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\Delta}} \log. \frac{1+\frac{2\gamma+\beta\delta+\beta x}{(\delta+x)\sqrt{\Delta}}}{1-\frac{2\gamma+\beta\delta+\beta x}{(\delta+x)\sqrt{\Delta}}} + C., \quad (54)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2+dx^3} = \frac{1}{2\gamma} \log. \frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(\delta+x)^3}$$

$$- \frac{\beta}{\gamma\sqrt{-\Delta}} \text{arc.tang.} \frac{2\gamma+\beta\delta+\beta x}{(\delta+x)\sqrt{-\Delta}} + C., \quad (55)$$

wo der Kürze wegen,

$$\Delta = c^2 - 4bd + 2cd\delta - 3d^2\delta^2, \quad (56)$$

gesetzt worden ist.

Die Gleichung (53) giebt, wenn a, b, c, d reelle Größe sind, jedesmal einen reellen Werth für δ; woraus, vermöge der Gleichungen (52) und (56), die Realität der Größen, α, β, γ, Δ folgt. Man wird daher die Gleichung (54) oder (55) zu Grunde legen, je nachdem Δ einen positiven oder einen negativen Werth annimmt.

53. Es sei ferner,

$$u = \int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

so kann man durch dieselbe Substitution, wie in der vorhergehenden Nr., nämlich:

$$x = y - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma},$$

den Werth von u durch schon bestimmte Integralausdrücke darstellen.

Es geht nämlich durch diese Substitution die vorgelegte Gleichung über in:

$$u = 2\sqrt{\gamma} \int \frac{ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \int \frac{dy}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}};$$

wird in Gleichung (24) x in y^2, α in $4\alpha\gamma-\beta^2$, β in $4\gamma^2$ umgesetzt, so hat man:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}} = \frac{1}{4\gamma^2} \sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2} + C.,$$

und die Gleichung (18) giebt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2\, y2}} = \frac{1}{2\gamma} \log. (2\gamma y + \sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2+4\gamma^2y^2}) + C.;$$

setzt man diese Ergebnisse in die letzte Gleichung, die u bestimmt, ein und restituirt den Werth von y, so erhält man:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$
$$-\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}\log.(\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})+C. \quad (57)$$

Man bedient sich dieser Gleichung, wenn γ einen positiven Werth hat; ist hingegen γ negativ, also:

$$u=\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}},$$

so sehe man hier γ als positiv an und setze:

$$x=y+\tfrac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma};$$

wodurch nunmehr die vorige Gleichung in folgende übergeht:

$$u=2\sqrt{\gamma}\int\frac{ydy}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2y^2}}+\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2y^2}}.$$

Das erste dieser Integralien wird wie vorhin nach (24) bestimmt, und das zweite folgt aus der Gleichung (17). Allein setzt man noch in diesem Letztern die Function arc. Sin. in arc.tang. um, so hat man:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2y^2}}=\frac{1}{2\gamma}\text{arc.tang.}\frac{2\gamma y}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2-4\gamma^2y^2}},$$

und

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}=-\frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}$$
$$+\frac{\beta}{2\gamma\sqrt{\gamma}}\text{arc.tang.}\frac{2\gamma x-\beta}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}+C. \quad (58)$$

Hat man endlich $\gamma=0$, so kann man weder die Gleichung (57), noch die Gleichung (58) zu Grunde legen, sondern man muß für diesen speziellen Fall die Bestimmung eigens vornehmen.

Man hat alsdann:

$$u=\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x}},$$

wird hier,

$$\alpha+\beta x=y^2,$$

gesetzt, dann ist:

$$u = -\frac{2\alpha}{\beta^2}\int dy + \frac{2}{\beta^2}\int y^2 dy ;$$

jeder dieser Integralausdrücke ist nach der Grundgleichung (I) angebbar; daher hat man, wenn nach der Vollziehung der Integration, $y = \sqrt{(\alpha+\beta x)}$, gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}} = \frac{2}{3\beta^2}(\beta x - 2\alpha)\sqrt{\alpha+\beta x} + C. \quad (59)$$

54. Legen wir uns endlich folgendes Integrale:

$$u = \int \frac{dx}{(a^2+2abx\,\mathrm{Cos}.\,\theta+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

zur Bestimmung vor.

Wird hier die Substitution:

$$x = \frac{\lambda+\mu y}{1+y}, \quad (m)$$

gemacht, so kann man die unbestimmten, jedoch constanten Größen λ und μ dergestalt bestimmen, daß nur noch gerade Potenzen der Variablen y restiren.

Man erreicht diesen Zweck, wenn man folgende zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} a^2+ab(\lambda+\mu)\mathrm{Cos}.\,\theta+b^2\lambda\mu = 0, \\ \alpha+\frac{1}{2}\beta(\lambda+\mu)+\gamma\lambda\mu = 0, \end{array}\right\} \quad (n)$$

festsetzt.

Die obige Größe u geht alsdann über in:

$$u = \int \frac{(\mu-\lambda)(1+y)\,dy}{[a^2+2ab\lambda\,\mathrm{Cos}.\,\theta+b^2\lambda^2+(a^2+2ab\mu\,\mathrm{Cos}.\,\theta+b^2\mu^2)y^2]\sqrt{\alpha^1+\gamma^1 y^2}},$$

wo

$$\left.\begin{array}{r} \alpha^1 = \alpha+\beta\lambda+\gamma\lambda^2, \\ \gamma^1 = \alpha+\beta\mu+\gamma\mu^2, \end{array}\right\} \quad (p)$$

gesetzt worden ist.

Suchen wir, bevor an die Ausmittelung des letzten Integralausdruckes übergegangen wird, die Größe λ und μ aus den Gleichungen (n) zu bestimmen. Eliminirt man aus denselben das Product $\lambda\mu$ und setzt der Kürze wegen:

$$M = \frac{\alpha b^2-\gamma a^2}{\beta b-2\gamma a\,\mathrm{Cos}.\,\theta}, \quad (q)$$

so findet man:

$$\mu+\lambda = -\frac{2}{b}M ;$$

diesen Werth in die erste der Gleichungen (n) eingesetzt, erhält man:

$$\mu\lambda = -\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b^2} M \, Cos.\theta \; ;$$

durch Verbindung dieser und der vorhergehenden Gleichung hat man ferner:

$$\mu - \lambda = \frac{2}{b} \sqrt{a^2 Sin.\theta^2 + (M - a\,Cos.\theta)^2} \; ;$$

es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{b} M + \frac{1}{b} \sqrt{a^2 Sin.\theta^2 + (M - a\,Cos.\theta)^2} \, , \\ \lambda &= -\frac{1}{b} M - \frac{1}{b} \sqrt{a^2 Sin.\theta^2 + (M - a\,Cos.\theta)^2} \, . \end{aligned}\right\} \quad (r)$$

Setzt man ferner,

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \sqrt{a^2 Sin.\theta^2 + (M - a\,Cos.\theta)^2} + (M - a\,Cos.\theta) \, , \\ B^2 &= \sqrt{a^2 Sin.\theta^2 + (M - a\,Cos.\theta)^2} - (M - a\,Cos.\theta) \, , \end{aligned}\right\} \quad (s)$$

so findet man, mit Beachtung des obigen Werthes von $\mu - \lambda$,

$$a^2 + 2ab\lambda\,Cos.\theta + b^2\lambda^2 = bA^2(\mu - \lambda) \, ,$$

$$a^2 + 2ab\mu\,Cos.\theta + b^2\mu^2 = bB^2(\mu - \lambda) \, ,$$

und der obige Werth von u geht über in:

$$u = \frac{1}{b} \int \frac{(1+y)\,dy}{(A^2 + B^2y^2)\sqrt{\alpha^1 + \gamma^1 y^2}} \, .$$

Da λ und μ, wie die obigen Gleichungen zeigen, reelle Größen sind, so sind es auch die Größen α^1 und γ^1; eben so weisen die obigen Gleichungen positive Werthe für A^2 und B^2 an: Wenn daher,

$$u = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{(A^2 + B^2y^2)\sqrt{\alpha^1 + \gamma^1 y^2}} + \frac{1}{b} \int \frac{y\,dy}{(A^2 + B^2y^2)\sqrt{\alpha^1 + \gamma^1 y^2}} \, ,$$

gesetzt wird, so kann man das erste Integrale rechts vom Gleichheitszeichen durch eine der Gleichungen (α^1), (β^1), . . (ξ^1) Nr. 48 darstellen; das zweite dieser Integralien geht aus der Gleichung (29) oder (30) hervor, wenn dort,

$$\gamma = o, \quad \alpha = \alpha^1, \quad \beta = 2\gamma^1, \quad x = \tfrac{1}{2}y^2 \, ,$$

gesetzt wird.

Wird nach vollzogener Integration,

$$y = \frac{\lambda - x}{x - \mu},$$

gesetzt, so erhält man den Werth des vorgelegten Integrals.

---

§. IV.

Integrationsmethode des Zurückführens auf dem Wege der Recursion.

55. In der Lehre der Reihen wird zuweilen das Bildungsgesetz der Glieder einer Reihe dadurch gegeben, daß eine Gleichung, die den Zusammenhang einiger Folgeglieder derselben anzeigt, und die man **Recursionsgleichung** nennt, aufgestellt wird; ein gleiches Verfahren wird oft mit gutem Erfolge auch in der Integralrechnung angewandt. So wird aus dem Verfolge dieses §. Nr. 57 II die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$m \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} + (m-1) \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^{m-1} \sqrt{1+x^2},$$

die für alle Werthe von m Statt hat, einleuchten; wird nun:

$$u_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

gesetzt, und denkt man sich hier statt m die Zahlen 0, 1, 2, 3, .. eingesetzt, so erscheint der Integralausdruck rechts vom Gleichheitszeichen als allgemeines Glied der Reihe:

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_m, \quad \ldots$$

dessen Bildungsgesetz, vermöge der obigen Gleichung, durch die Recursionsgleichung:

$$mu_m + (m-1)u_{m-2} = x^{m-1}\sqrt{1+x^2},$$

gegeben erscheint. Behandelt man diese Gleichung wie es in der Theorie der Reihen üblich ist; so überzeugt man sich sehr bald, daß die Werthe von u_2, u_4, u_6, . . . oder, daß die Werthe der Integralausdrücke:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \ldots$$

sämmtlich von der Kenntniß des Werthes der Größe u_0 oder von dem Integralausdrucke:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

abhängen; und daß eben so die Werthe der Integralien:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1+x^2}}, \ldots$$

von dem Werthe des Integralausdruckes:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}},$$

abhängen. Nun sind diese zwei Integralien u_0 und u_1 in dem Vorangeschickten bereits enthalten und bestimmt; daher darf auch das Glied u_m oder der Integralausdruck:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

als bekannt oder als darstellbar angesehen werden. Mit der Aufstellung der Recursionsgleichungen von Integralausdrücken, die häufige Anwendung finden, werden wir uns in den nächstfolgenden Nrn. beschäftigen.

56. Die Integralgleichungen (7) und (8) bieten, mit Zuziehung der Grundgleichung (4), sechs Recursionsgleichungen dar, die ihres öftern Gebrauches wegen, unter der ihnen ausschließlich beigelegten Benennung **Reductionsgleichungen** in der Integralrechnung auftreten.

Mit der Herstellung dieser Reductionsgleichungen wollen wir uns zuerst beschäftigen.

Wird in der Grundgleichung (4) Nr. 38 folgende Bestimmung über die Functionen F(x) und f(x) getroffen:

$$d.\, f(x) = (a+bx^n)^{m-1}x^{n-1}dx \text{ und } F(x) = x^{p-n+1},$$

so giebt die Gleichung (7), wenn einstweilen von der Integrationsconstante abgesehen wird,

$$f(x) = \frac{1}{mnb}(a+bx^n)^m,$$

und durch Differenziation:

$$d.\, F(x) = (p-n+1)x^{p-n}dx.$$

Wird nun,

$$X = a+bx^n,$$

gesetzt, so geht die Gleichung (4) über in:

$$\int X^{m-1} x^p dx + \frac{p-n+1}{mnb} \int X^m x^{p-n} dx = \frac{X^m x^{p-n+1}}{mnb}. \qquad (\alpha)$$

Setzt man ferner in die Gleichung (4),

$$d.f(x) = (a+bx^n)^{m-1} x^{-mn-1} dx \text{ und } F(x) = x^{p+mn+1},$$

so giebt die Gleichung (8)

$$f(x) = -\frac{1}{mna} (a+bx^n)^m x^{-mn},$$

und

$$d.F(x) = (p+mn+1) x^{p+mn} dx.$$

Wenn daher obiger Werth für X beibehalten wird, so hat man:

$$\int X^{m-1} x^p dx - \frac{p+mn+1}{mna} \int X^m x^p dx = -\frac{X^m x^{p+1}}{mna}. \text{*)} \qquad (\beta)$$

Subtrahirt man endlich die Gleichungen (α) und (β), so erhält man:

$$\frac{p+mn+1}{a} \int X^m x^p dx + \frac{p-n+1}{b} \int X^m x^{p-n} dx = \frac{X^{m+1} x^{p-n+1}}{ab}. \qquad (\gamma)$$

Diese drei Gleichungen (α), (β), (γ) rufen die angekündigten Reductionsgleichungen hervor.

Erhöhet man in der Gleichung (α) m um eine Einheit, so findet man:

$$\int X^m x^p dx = \frac{X^{m+1} x^{p-n+1}}{(m+1)nb} - \frac{p-n+1}{(m+1)nb} \int X^{m+1} x^{p-n} dx; \qquad (60)$$

läßt man in derselben Gleichung (α) p in p+n übergehen, dann findet man:

$$\int X^m x^p dx = \frac{X^m x^{p+1}}{p+1} - \frac{mnb}{p+1} \int X^{m-1} x^{p+n} dx. \qquad (61)$$

Eben so giebt die Gleichung (β), wenn daselbst m um eine Einheit erhöhet wird:

*) Dieses Verfahren mit Hülfe der Grundgleichung (4) Integralausdrücke verschiedener Form in gegenseitige Abhängigkeit zu bringen, wird theilweises Integriren genannt.

$$\int X^m x^p dx = -\frac{X^{m+1} x^{p+1}}{(m+1)na} + \frac{p+1+n(m+1)}{(m+1)na}\int X^{m+1} x^p dx\,, \quad (62)$$

und unmittelbar aus dieser Gleichung (β) findet man:

$$\int X^m x^p dx = \frac{X^m x^{p+1}}{p+mn+1} + \frac{mna}{p+mn+1}\int X^{m-1} x^p dx\,. \quad (63)$$

Ferner findet man aus der Gleichung (γ):

$$\int X^m x^p dx = \frac{X^{m+1} x^{p-n+1}}{(p+mn+1)b} - \frac{a}{b}\cdot\frac{p-n+1}{p+mn+1}\int X^m x^{p-n} dx\,, \quad (64)$$

und wenn in (γ) p in p+n umgesetzt wird, findet man endlich:

$$\int X^m x^p dx = \frac{X^{m+1} x^{p+1}}{(p+1)a} - \frac{b}{a}\,\frac{p+1+n(m+1)}{p+1}\int X^m x^{p+n} dx\,. \quad (65)$$

Von diesen sechs Reductionsgleichungen benützt man, je nach Umständen, eine oder mehrere, um unbekannte oder complicirte Integralausdrücke auf bekannte oder einfachere zurückzuführen.

57. Aus den eben aufgestellten Reductionsgleichungen wollen wir einige besondere Fälle angeben, die in der Folge zur Anwendung kommen werden.

I. Läßt man in der Gleichung (62) m in $-m$ übergehen, setzt $n=2$ und $p=o$ voraus, so hat man folgende Recursionsgleichung:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^m} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2m-2}\cdot\frac{x}{(a+bx^2)^{m-1}} + \frac{1}{a}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{m-1}}\,.$$

Wird hier x in c+x umgesetzt, und macht man:

$$a+bc^2 = \alpha,\quad 2bc = \beta,\quad b = \gamma,$$

so erhält man folgende Recursionsgleichung:

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^m} = \frac{1}{(m-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)}\,\frac{\beta+2\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m-1}}$$
$$+\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{4\gamma}{4\alpha\gamma-\beta^2}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m-1}}\,. \quad (66)$$

Ferner giebt die Gleichung (7) Nr. 39:

$$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)b}\,\frac{1}{(a+bx^2)^{m-1}}\,,$$

vertauscht man auch hier x in c+x und führt, wie vorhin, die Größen α, β, γ, ein; so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (66) die Recursionsgleichung:

$$\int \frac{xdx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^m} = \frac{-1}{(m-1)(4\alpha\gamma-\beta^2)} \cdot \frac{2\alpha+\beta x}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m-1}}$$

$$- \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2\beta}{4\alpha\gamma-\beta^2} \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m-1}} . \qquad (67)$$

Wird nun m als ganze positive Zahl gedacht, so kann man, mit Hülfe der eben aufgestellten Recursionsgleichungen (66) und (67), die Integralausdrücke links der Gleichheitszeichen von dem in der Nr. 44 bestimmten Integralausdrucke:

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

abhängig machen. Wenn ferner m eine gebrochene positive Zahl mit dem Nenner 2 ist, dann hängen die Integralausdrücke linker Hand der Gleichheitszeichen derselben Gleichungen von dem, gleichfalls, Nr. 44 bestimmten Integralausdrucke:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

ab.

II. Setzt man in die Gleichung (64)

$$n = 2, \quad \text{und} \quad m = -\tfrac{1}{2},$$

so hat man, je nachdem p von der Form 2m oder 2m+1 ist, wo m als ganze positive Zahl gedacht wird, die erste oder zweite der folgenden Gleichungen:

$$\int \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^{2m-1}\sqrt{a+bx^2}}{2mb} - \frac{a}{b} \cdot \frac{2m-1}{2m} \int \frac{x^{2m-2}dx}{\sqrt{a+bx^2}}, \qquad (68)$$

$$\int \frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^{2m}\sqrt{a+bx^2}}{(2m+1)b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{2m}{2m+1} \int \frac{x^{2m-1}dx}{\sqrt{a+bx^2}} . \qquad (69)$$

Läßt man hier m nach und nach in m—1, m—2, m—3, . . . übergehen, so führt zuletzt die erste dieser zwei Gleichungen auf das Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

welches wir Nr. 43 bestimmt haben, und die zweite dieser Gleichungen führt auf das Integrale:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

welches als specieller Fall der abgeleiteten Grundgleichung (7) be-

stimmt werden kann. Wird endlich in den Gleichungen (68) und (69) x in $\frac{1}{x}$ umgesetzt und dann a mit b vertauscht, und wird überdieß noch in der zweiten dieser Gleichungen m in m — 1 umgesetzt; so erhält man folgende zwei Recursionsgleichungen:

$$\int\frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{2max^{2m}} - \frac{b}{a}\cdot\frac{2m-1}{2m}\int\frac{dx}{x^{2m-1}\sqrt{a+bx^2}}, \quad (70)$$

$$\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{(2m-1)ax^{2m-1}} - \frac{b}{a}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\int\frac{dx}{x^{2m-2}\sqrt{a+bx^2}}. \quad (71)$$

Diese zwei Gleichungen hätten wir auch direct aus der Reductionsgleichung (65) erhalten können, wenn wir daselbst $m = -\frac{1}{2}$, $n=2$ gesetzt und für die erste Gleichung p von der Form $-(2m+1)$, für die zweite p von der Form $-2m$ angenommen hätten.

58. Wir wollen uns nun an die Ableitung noch einiger Recursionsgleichungen machen, die mit Erfolg in der Integralrechnung gebraucht werden.

Es ist:

$$d.\, x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} =$$

$$= (m-1)\alpha\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + \frac{2m-1}{2}\beta\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + m\gamma\frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}};$$

wird nun folgende Gleichung:

$$X_m = \int\frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}, \quad (72)$$

festgesetzt, so hat man, wenn in obiger Gleichung jedes Glied mit dem Integralzeichen versehen und der zweite Theil der Gleichung in umgekehrter Ordnung aufgestellt wird, die Gleichung:

$$m\gamma X_m + \frac{2m-1}{2}\beta X_{m-1} + (m-1)\alpha X_{m-2} = x^{m-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}. \quad (73)$$

Setzt man hier m=1, so hat man:

$$\gamma X_1 + \tfrac{1}{2}\beta X_0 = \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2},$$

woraus die Abhängigkeit des Integralausdruckes X_1 von dem Werthe des Integrals X_0 erhellet. Wenn demnach m eine ganze positive Zahl ist, so giebt die Gleichung (73), auf dem Wege der Recursion, den Werth von X_m, wenn der von X_0 bekannt ist.

Nun ist:

$$X_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

welches Integrale Nr. 44 vollständig bestimmt worden ist; daher kann auch X_m der Gleichung (72) als bestimmt oder bestimmbar angesehen werden.

59. Setzen wir ferner folgende Gleichung fest:

$$X_m = \int \frac{dx}{x^m\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}, \tag{74}$$

so findet man eine Recursionsgleichung zur Bestimmung von X_m, wenn man in Gleichung (73) m in $-m$ und X_{-m} in X_m umsetzt.

Man hat alsdann:

$$m\gamma X_m + \frac{2m+1}{2}\beta X_{m+1} + (m+1)\alpha X_{m+2} = -\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^{m+1}},$$

oder, wenn man m in $m-2$ umsetzt und den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in umgekehrter Ordnung stellt, so hat man auch:

$$(m-1)\alpha X_m + \frac{2m-3}{2}\beta X_{m-1} + (m-2)\gamma X_{m-2} = -\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^{m-1}}. \tag{75}$$

Setzt man hier $m=2$, so ist:

$$\alpha X_2 + \tfrac{1}{2}\beta X_1 = -\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x},$$

woraus, wie vorhin, gefolgert wird, daß X_m aus Gleichung (74) von

$$X_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

abhängig sei. Dieses Integrale haben wir Nr. 45 bestimmt, daher ist auch X_m als darstellbar anzusehen.

60. Läßt man in den Gleichungen (74) und (75) der vorangehenden Nr., x in $a+bx$ übergehen und setzt man:

$$\alpha^1 = \alpha + \beta a + \gamma a^2,$$

$$\beta^1 = \beta b + 2\gamma ab, \quad \gamma^1 = \gamma b^2,$$

so hat man, wenn

$$X_m = \int \frac{dx}{(a+bx)^m\sqrt{\alpha^1+\beta^1 x+\gamma^1 x^2}} \tag{76}$$

angenommen wird, folgende Recursionsgleichung:

$$(m-1)AX_m+\frac{2m-3}{2}BX_{m-1}+(m-2)CX_{m-2} = -b.\frac{\sqrt{\alpha^1+\beta^1x+\gamma^1x^2}}{(a+bx)^{m-1}}, \quad (77)$$

wenn der Kürze wegen

$$A = \alpha^1b^2-\beta^1ab+\gamma^1a^2\,,$$

$$B = \beta^1b-2\gamma^1a\,,\quad C=\gamma^1\,,$$

angenommen wird.

Da die letzte Gleichung für m=2 in:

$$AX_2+\tfrac{1}{2}BX_1 = -b.\frac{\sqrt{\alpha^1+\beta^1x+\gamma^1x^2}}{a+bx}\,,$$

übergeht, und der Werth von

$$X_1 = \int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^1+\beta^1x+\gamma^1x^2}}$$

aus den Gleichungen (29), (30), (31), Nr. 46 erhellet, so ist, wenn m eine ganze positive Zahl vorstellt, X_m aus (76) mit Hülfe der Recursionsgleichung (77) ebenfalls als angebbar zu betrachten.

61. Gehen wir endlich zur Ausmittelung der Integralausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} X_m &= \int\frac{dx}{(a^2+2abx\,Cos.\theta+b^2x^2)^m\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\,,\\ X^1_m &= \int\frac{xdx}{(a^2+2abx\,Cos.\theta+b^2x^2)^m\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\,,\end{aligned}\right\}\quad (78)$$

über.

Setzt man der Kürze wegen:

$$u = a^2+2abx\,Cos.\theta+b^2x^2\,,$$

$$v^2 = \alpha+\beta x+\gamma x^2\,,$$

so findet man, wenn man nach der Differenziation des Bruches $\frac{v}{u^m}$ in den Zählern der erhaltenen Resultate,

$$x^2 = \frac{1}{b^2}(u-a^2-2abx\,Cos.\theta)\,,$$

$$x^3 = \frac{1}{b^3}\left\{(bx-2a\,Cos.\theta)u+a^2b(1+2Cos.2\theta)x+2a^3Cos.\theta\right\}\,,$$

setzt, folgende Gleichung:

$$b\ d.\frac{v}{u^m} = \frac{\frac{1}{2}\beta b-2m(\beta b-\gamma a\,Cos.\theta)-(2m-1)\gamma bx}{u^m v}dx$$

$$-2m\frac{a(\alpha b^2Cos.\theta-\beta ab+\gamma a^2Cos.\theta)+b(\alpha b^2-\beta ab\,Cos.\theta+\gamma a^2Cos.2\theta)x}{u^{m+1}v}dx.$$

Werden die Integralzeichen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens angebracht und die Bedeutungen X_m und X'_m berücksichtiget, so erhält man:

$$\frac{b\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{(a^2+2abx\mathrm{Cos}.\theta+b^2x^2)^m} =$$

$$= [\tfrac{1}{2}\beta b-2m(\beta b-\gamma a\mathrm{Cos}.\theta)]X_m$$

$$-\ 2ma[\alpha b^2\mathrm{Cos}.\theta-\beta ab+\gamma a^2\mathrm{Cos}.\theta]X_{m+1}$$

$$-\ (2m-1)\gamma bX'_m$$

$$-\ 2mb\ [\alpha b^2-\beta ab\mathrm{Cos}\theta+\gamma a^2\mathrm{Cos}.2\theta]X'_{m+1}. \qquad (79)$$

Behält man ferner die obigen Werthe von u und v^2 bei, und setzt man in die Grundgleichung (4) Nr. 38:

$$F(x) = \frac{bv}{u^m} \ \text{ und } \ f(x) = x\,,$$

so erhält man mit Berücksichtigung des obigen Werthes von $d.\frac{v}{u^m}$ und wenn, wie oben, in den Zählern:

$$x^2 = \frac{1}{b^2}(u-a^2-2abx\mathrm{Cos}.\theta)\,,$$

gesetzt wird, folgende zweite Recursionsgleichung:

$$\frac{b^2x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{(a^2+2abx\mathrm{Cos}.\theta+b^2x^2)^m} =$$

$$= -2(m-1)\gamma X_{m-1}$$

$$+\ [\alpha b^2-2\gamma a^2-2m(\alpha b^2-\beta ab\mathrm{Cos}.\theta-2\gamma a^2\mathrm{Sin}.\theta^2)]X_m$$

$$+\ 2ma^2[\alpha b^2-\beta ab\mathrm{Cos}.\theta+\gamma a^2\mathrm{Cos}.2\theta]X_{m+1}$$

$$+\ \tfrac{1}{2}b[3\beta b-8a\gamma\mathrm{Cos}.\theta-4m(\beta b-3\gamma a\mathrm{Cos}.\theta)]X'_m$$

$$+\ 2mab[\alpha b^2\mathrm{Cs}.\theta-\beta ab\mathrm{Cs}.2\theta+\gamma a^2\mathrm{Cs}.3\theta]X'_{m+1}. \qquad (80)$$

Durch Vereinigung dieser Gleichung mit der Recursionsgleichung (78) kann man, wenn für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . gesetzt werden, die Werthe von X_2, X'_2, X_3, X'_3, zc., durch die Werthe von X_1, X'_1 ausdrücken. Nun haben wir Nr. 54 den Integralausdruck:

$$X_1 = \int\frac{dx}{(a^2+2abx\mathrm{Cos}.\theta+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\,,$$

bestimmen gelehrt; ferner kann man das Integrale:

$$X_1^1 = \int \frac{x dx}{(a^2 + 2abx \cos.\theta + b^2x^2)\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}},$$

durch die Annahme $x = \frac{1}{y}$ von dem folgenden:

$$X_1^1 = -\int \frac{dy}{(b^2 + 2aby \cos.\theta + a^2y^2)\sqrt{\gamma + \beta y + \alpha y^2}},$$

abhängig machen, welches auf gleichem Wege wie das vorhergehende zu bestimmen ist; daher sind auch die durch X_m und $X^1{}_m$ dargestellten Integralien jedesmal als angebbar anzusehen.

---

§. V.

Integrationsmethode des Zurückführens auf dem Wege des Zerlegens.

62. Gelingt es einen verwickelten Differenzialausdruck $\varphi(x)dx$ in eine algebraische Summe integrirbarer Differenzialausdrücke, deren Anzahl endlich ist, zu zerfällen; so nennt man diese Art zur Kenntniß der Integralfunction zu gelangen, das Integriren durchs Zurückführen auf dem Wege des Zerlegens. Wir wollen diese Methode auf zwei Fälle von bedeutender Allgemeinheit anwenden.

63. Man habe:

$$u = \int \varphi(x)dx,$$

wo $\varphi(x)$ im ersten dieser zwei Fälle eine algebraische rationale Function von x vorstellen soll.

Zerfällt man die gebrochene Function $\varphi(x)$, falls der höchste Exponent von x im Nenner gleich oder kleiner als der höchste Exponent von x im Zähler ist, durch einfache Division in eine ganze rationale Function von x der Form:

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

und in eine echtgebrochene Function von x der Form:

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^p + b_{p-1}x^{p-1} + b_{p-2}x^{p-2} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

so werden m, n, p ganze positive Zahlen, Null mit begriffen, vorstellen, und $A_0, A_1, A_2, \ldots A_m$, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$, b_0,

b_1, b_2, . . . b_m werden willkührliche, jedoch von x unabhängige Größen bedeuten. Zerlegt man nun den Nenner dieses Bruches in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades, so kann man statt des letzten Bruches eine endliche Summe echtgebrochener Functionen von x setzen, deren Nenner die eben erwähnten reellen Factoren des ersten oder zweiten Grades sein werden. Ein Theil dieser Brüche wird von der Form:

$$\frac{1}{(a^1 + b^1 x)^k};$$

und ein anderer Theil von der Form:

$$\frac{\alpha + \beta x}{(a^2 + 2abx \operatorname{Cos}.\Theta + b^2 x^2)^h},$$

sein, wo k und h ganze positive Zahlen und a^1, b^1, α, β, a, b, Θ, beliebige, von x unabhängige Größen vorstellen werden.

Da die Summe dieser mit dx multiplicirten und nach x integrirten Bestandtheile von $\varphi(x)$ die verlangte Integralfunction darstellt, so reducirt sich die Werthbestimmung des vorgelegten Integrals auf die Ausmittelung dreier Integralausdrücke, wie die folgenden:

$$1)\ \int x^m dx, \quad 2)\ \int \frac{dx}{(a^1 + b^1 x)^k}, \quad 3)\ \int \frac{(\alpha + \beta x)dx}{(a^2 + 2abx \operatorname{Cos}.\Theta + b^2 x^2)^h}.$$

Das unter 1) aufgeführte Integrale ist in der Fundamentalgleichung (I) enthalten. Der Integralausdruck 2) ist für $k > 1$ ein besonderer Fall der abgeleiteten Grundgleichung (7), und für $k = 1$ ist dessen Werth in der Gleichung (13) Nr. 42 enthalten.

Der Integralausdruck 3) kann, wenn $h > 1$ ist, mit Zuziehung der Recursionsgleichungen (66), (67) Nr. 57 von dem Falle $h = 1$ abhängig gemacht werden; und für diesen Fall endlich ist das Integrale in den Nrn. 44 und 51 behandelt und bestimmt worden.

64. Bevor wir den zweiten allgemeinen Fall des Integrirens durchs Zerlegen aufführen, wollen wir, als Anwendung des in der vorhergehenden Nr. besprochenen Falles, das Integrale:

$$\int \frac{x^m dx}{1 \pm x^n},$$

zu bestimmen suchen.

Wie in der vorhergehenden Nr. erwähnt wurde, werden wir m und

n als ganze positive Zahlen und der Einfachheit wegen $m < n$ voraussetzen. Hier ist nicht der Ort das Verfahren des Zerlegens einer echtgebrochenen, rationalen Function in ihre Bestandtheile oder in Partialbrüche auseinanderzusetzen; allein um zu zeigen wie vortheilhaft, auch hier, die Differenzialrechnung sich bewährt, werden wir uns etwas ausführlicher mit der Zerlegung des Bruches:

$$\frac{x^m}{1 \pm x^n}$$

in Theilbrüche (nach der vorigen Nr.) befassen.

Um die Uebersicht zu erleichtern, legen wir uns zuerst den Bruch:

$$\frac{x^m}{1 + x^{2p}},$$

vor, wo $m < 2p$ ist.

Das Binomium $1 + x^{2p}$ hat, wie bekannt, keine reellen Factoren des ersten Grades, und wie aus der Lehre der binomischen Gleichungen vorausgesetzt werden darf, bilden folgende Trinomien die reellen Factoren des zweiten Grades desselben:

$$1 + 2x \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2p} + x^2,$$

$$1 + 2x \operatorname{Cos.} \frac{3\pi}{2p} + x^2,$$

$$1 + 2x \operatorname{Cos.} \frac{5\pi}{2p} + x^2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$1 + 2x \operatorname{Cos.} \frac{(2p-1)\pi}{2p} + x^2,$$

wo π die bekannte Verhältnißzahl des Kreisumfanges zum Durchmesser desselben vorstellt.

Wird nun,

$$\alpha = \frac{\pi}{2p},$$

angenommen, so kann man, wenn a_1, b_1, a_3, b_3, . . . a_{2p-1}, b_{2p-1} unbekannte, von x independente Größen vorstellen, folgende Gleichung festsetzen:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p}} = \frac{a_1+b_1x}{1+2x\operatorname{Cos}.\alpha+x^2}$$

$$+\frac{a_3+b_3x}{1+2x\operatorname{Cos}.3\alpha+x^2}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\frac{a_{2p-1}+b_{2p-1}x}{1+2x\operatorname{Cos}.(2p-1)\alpha+x^2}\,. \qquad (\alpha)$$

Wir wollen nun zeigen, wie die Größen a_1, b_1, a_3, b_3, ... a_{p-1}, b_{p-1}, zu bestimmen seien, damit diese Gleichung identisch in Bezug auf x werde.

Werden die einzelnen Brüche rechts vom Gleichheitszeichen, in der Ordnung wie sie aufgestellt sind, durch:

$$u_1,\quad u_3,\quad u_5,\quad \ldots\quad u_{2p-1}$$

dargestellt, so hat man, wenn beiderseits mit $1+x^{2p}$ multiplicirt wird, folgende Gleichung:

$$x^m = u_1(1+x^{2p})+u_3(1+x^{2p})+u_5(1+x^{2p})+\ \ldots\ +u_{2p-1}(1+x^{2p}). \quad (\beta)$$

Setzt man in dieser nach x identischen Gleichung irgend eine der Wurzeln der Gleichung:

$$x^{2p}+1 = 0\,, \qquad (\gamma)$$

statt x, so werden rechts vom Gleichheitszeichen alle Glieder, mit Ausnahme eines einzigen, das in $\frac{0}{0}$ übergeht, verschwinden.

In der That, stellt k irgend eine der Zahlen:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p\ ;$$

vor, und wird in die Gleichung (β) eine der Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$x^2+2x\operatorname{Cos}.(2k-1)\alpha+1 = 0\,, \qquad (\delta)$$

die auch Wurzel der Gleichung (γ) ist, statt x gesetzt, so verschwinden, des so eben erwähnten Umstandes wegen, sämmtliche Glieder rechts vom Gleichheitszeichen in (β), das Glied $u_{2k-1}(1+x^{2p})$ ausgenommen, das, vermöge der Gleichung:

$$u_{2k-1} = \frac{a_{2k-1}+b_{2k-1}x}{1+2x\operatorname{Cos}.(2k-1)\alpha+x^2}\,,$$

in $\frac{0}{0}$ übergehet.

Stellen wir nun dieses in $\frac{0}{0}$ übergehende Glied, durch v_{2k-1} dar, so hat man:

$$v_{2k-1} = (a_{2k-1}+b_{2k-1}x) \cdot \frac{1+x^{2p}}{1+2x\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha+x^2} \,. \qquad (\varepsilon)$$

Wenn daher w eine den Gleichungen (γ) und (δ) gemeinschaftlich zukommende Wurzel vorstellt, und setzt man:

$$\varphi(x) = \frac{1+x^{2p}}{1+2x\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha+x^2} \,;$$

so hat man $\varphi(w) = \frac{0}{0}$. Allein verfährt man hier nach Nr. 29, so hat man:

$$\varphi(w) = \frac{2pw^{2p-1}}{2\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha+2w} \,,$$

Ferner haben dieselben Gleichungen (γ) und (δ) außer der Wurzel w auch den reciproken Werth zu w oder $\frac{1}{w}$ als gemeinschaftliche Wurzel; daher ist auch:

$$\varphi\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{2p}{w^{2p-1}}}{2\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha+\frac{2}{w}} \,.$$

Die Gleichung (ε) geht somit, für $x=w$, über in:

$$v_{2k-1} = (a_{2k-1}+wb_{2k-1}) \frac{2p}{2} \cdot \frac{w^{2p-1}}{w+\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha} \,,$$

und für $x = \frac{1}{w}$ in:

$$v_{2k-1} = \left(a_{2k-1}+\frac{1}{w}b_{2k-1}\right) \frac{2p}{2} \cdot \frac{1}{w^{2p-1}\left(\frac{1}{w}+\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha\right)} \,.$$

Setzt man demnach in die Gleichung (β) $x=w$ und $x=\frac{1}{w}$, und berücksichtiget diese Ergebnisse, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$w^m = (a_{2k-1}+wb_{2k-1}) \frac{2p}{2} \cdot \frac{w^{2p-1}}{w+\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha} \,,$$

$$\frac{1}{w^m} = \left(a_{2k-1}+\frac{1}{w}b_{2k-1}\right) \frac{2p}{2} \cdot \frac{1}{w^{2p-1}\left(\frac{1}{w}+\operatorname{Cos.}(2k-1)\alpha\right)} \,,$$

welche die Größen a_{2k-1}, b_{2k-1} durch ω und $\frac{1}{\omega}$ darstellen werden.

Nun folgt aus der Gleichung (δ):

$$w = - \left\{ \text{Cos.}(2k-1)\alpha - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(2k-1)\alpha \right\},$$

$$\frac{1}{w} = - \left\{ \text{Cos.}(2k-1)\alpha + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(2k-1)\alpha \right\};$$

wenn man daher diese Werthe von w und $\frac{1}{w}$ berücksichtiget und überdieß bedenkt, daß man vermöge der Gleichung (γ),

$$w^{2p} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{w^{2p}} = -1,$$

hat; dann findet man aus den obigen zwei Gleichungen:

$$a_{2k-1} = (-1)^m \frac{2}{2p} \text{Cos.}\,m(2k-1)\alpha,$$

$$b_{2k-1} = (-1)^m \frac{2}{2p} \text{Cos.}(m+1)(2k-1)\alpha.$$

Wird hier der Reihe nach $k = 1, 2, 3, \ldots p$ gesetzt, so erhält man in gleicher Ordnung die Werthe von a_1, b_1; a_3, b_3; . . a_{2p-1}, b_{2p-1}. Es geht somit die Gleichung (α), wenn der oben für α festgesetzte Werth wieder eingeführt wird, in folgende über:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p}} = \frac{2(-1)^m}{2p} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}(2k-1)m\frac{\pi}{2p} + x\,\text{Cos.}(2k-1)(m+1)\frac{\pi}{2p}}{1 + 2x\,\text{Cos.}(2k-1)\frac{\pi}{2p} + x^2}, \quad (81)$$

wo das Summenzeichen auf alle ganzen Zahlenwerthe von $k = 1$ bis $k = p$ sich erstreckt.

Statt der letzten Gleichung kann man auch folgende setzen:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p}} = \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}(2k-1)m\frac{\pi}{2p} - x\,\text{Cos.}(2k-1)(m+1)\frac{\pi}{2p}}{1 - 2x\,\text{Cos.}(2k-1)\frac{\pi}{2p} + x^2}, \quad (82)$$

die aus der vorhergehenden durch das Umsetzen von x in $-x$ hervorgeht.

Ganz auf gleichem Wege gelangt man zur Kenntniß der, dem Bruche:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p+1}},$$

zugehörenden Partialbrüche, wo $m < 2p+1$ ist.

Da das Binomium $1+x^{2p+1}$ den einzigen reellen Factor des ersten Grades:

$$1+x\,,$$

und folgende reelle trinomische Factoren des zweiten Grades:

$$1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{\pi}{2p+1}+x^2\,,$$

$$1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{3\pi}{2p+1}+x^2\,,$$

$$1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{5\pi}{2p+1}+x^2\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{(2p-1)\pi}{2p+1}+x^2\,,$$

enthält; so wird man wie vorhin:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p+1}}=\frac{A}{1+x}+\frac{a_1+b_1x}{1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{\pi}{2p+1}+x^2}$$
$$+\frac{a_3+b_3x}{1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{3\pi}{2p+1}+x^2}$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{a_{2p-1}+b_{2p-1}x}{1-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{(2p-1)\pi}{2p+1}+x^2}\,,$$

setzen dürfen und auf demselben Wege, wie vorhin, folgende Gleichungen finden:

$$A=\frac{(-1)^m}{2p+1}\,,$$

$$w^m=(a_{2k-1}+wb_{2k-1})\,\frac{2p+1}{2}\cdot\frac{w^{2p}}{w-\mathrm{Cos}\cdot\frac{2k-1}{2p+1}\pi}\,,$$

$$\frac{1}{w^m}=(a_{2k-1}+\frac{1}{w}b_{2k-1})\,\frac{2p+1}{2}\cdot\frac{1}{w^{2p}\left(\frac{1}{w}-\mathrm{Cos.}\frac{2k-1}{2p+1}\pi\right)}\,,$$

wo w und $\frac{1}{w}$ die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2-2x\,\mathrm{Cos.}\frac{2k-1}{2p+1}\pi+1=0\,,$$

sind. Man findet also in diesem Falle:

$$a_{2k-1} = \frac{2}{2p+1} \text{Cos.} \frac{m(2k-1)}{2p+1}\pi,$$

$$b_{2k-1} = -\frac{2}{2p+1} \text{Cos.} \frac{(m+1)(2k-1)}{2p+1}\pi,$$

und es ist:

$$\frac{x^m}{1+x^{2p+1}} = \frac{(-1)^m}{2p+1} \cdot \frac{1}{1+x}$$
$$+ \frac{2}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}(2k-1)m\frac{\pi}{2p+1} - x\text{Cos.}(2k-1)(m+1)\frac{\pi}{2p+1}}{1-2x\text{Cos.}(2k-1)\frac{\pi}{2p+1}+x^2} \quad (83)$$

Setzt man hier x in $-x$ um, so hat man auch:

$$\frac{x^m}{1-x^{2p+1}} = \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$+ \frac{2(-1)^m}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}(2k-1)m\frac{\pi}{2p+1} + x\text{Cos.}(2k-1)(m+1)\frac{\pi}{2p+1}}{1+2x\text{Cos.}(2k-1)\frac{\pi}{2p+1}+x^2} \quad (84)$$

Werden endlich die reellen Factoren von $1-x^{2p}$ berücksichtiget, so erhält man auf gleiche Weise, unter der Annahme $m < 2p$, folgende Gleichung:

$$\frac{x^m}{1-x^{2p}} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^m}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\text{Cos.}2km\frac{\pi}{2p} - x\,\text{Cos.}2k(m+1)\frac{\pi}{2p}}{1-2x\text{Cos.}2k\frac{\pi}{2p}+x^2}, \quad (85)$$

oder, wenn $-x$ statt x gesetzt wird,

$$\frac{x^m}{1-x^{2p}} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^m}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{2(-1)^m}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\text{Cos.}2km\frac{\pi}{2p} + x\text{Cos.}2k(m+1)\frac{\pi}{2p}}{1+2x\text{Cos.}2k\frac{\pi}{2p}+x^2}. \quad (86)$$

65. Nunmehr sind wir in der Lage zur Integration des im Anfange der vorhergehenden Nr. aufgestellten Integralausdruckes zu schreiten. Multiplicirt man die daselbst gefundenen Gleichungen

mit dx und versucht nach x zu integriren, so hat man es mit der Bestimmung folgender drei Integralausdrücke zu thun.

$$\int\frac{dx}{1+x}\,,\qquad\qquad \int\frac{dx}{1-x}\,,$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}.m\lambda \pm x\mathrm{Cos}.(m+1)\lambda}{1\pm 2x\mathrm{Cos}.\lambda+x^2}\,dx\,,$$

wo λ eine von x unabhängige Constante ist.

Nun giebt die Gleichung (13) Nr. 42:

$$\int\frac{dx}{1+x}=\log.(1+x)\,,\qquad \int\frac{dx}{1-x}=-\log.(1-x)\,,$$

und die in den Nrn. 44 und 51 aufgestellten Gleichungen geben:

$$\int\frac{\mathrm{Cos}.m\lambda+x\mathrm{Cos}.(m+1)\lambda}{1\pm 2x\mathrm{Cos}.\lambda+x^2}\,dx=\pm\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}.(m+1)\lambda.\log.(1\pm 2x\mathrm{Cos}\lambda+x^2)$$
$$+\ \mathrm{Sin}.(m+1)\lambda.\mathrm{arc.tang}.\frac{x\pm \mathrm{Cos}.\lambda}{\mathrm{Sin}.\lambda}\,.$$

Somit geben die Gleichungen (81) — (86) der vorigen Nr. folgende Integralgleichungen:

$$\int\frac{x^m dx}{1+x^{2p}}=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}\mathrm{Cos}.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p}\log.(1+2x\mathrm{Cos}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}+x^2)$$

$$+\frac{2(-1)^m}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}\mathrm{Sin}.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p}\mathrm{arc.tang}.\frac{x+\mathrm{Cos}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}}{\mathrm{Sin}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}}+C. \quad (87)$$

$$\int\frac{x^m dx}{1+x^{2p}}=$$

$$=\frac{-1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}\mathrm{Cos}.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p}\log.(1-2x\mathrm{Cos}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}+x^2)$$

$$+\frac{2}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}\mathrm{Sin}.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p}\mathrm{arc.tang}.\frac{x-\mathrm{Cos}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}}{\mathrm{Sin}.\frac{(2k-1)\pi}{2p}}+C.\,, \quad (88)$$

$$\int \frac{x^m dx}{1+x^{2p+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2p+1} \log.(1+x)$$

$$- \frac{1}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p+1} \log.(1-2x\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}+x^2)$$

$$+ \frac{2}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p+1} \text{arc.tang.} \frac{x-\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}}{\text{Sin.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}} + C., \quad (89)$$

$$\int \frac{x^m dx}{1-x^{2p+1}} =$$

$$= -\frac{1}{2p+1} \log.(1-x)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p+1} \log.(1+2x\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}+x^2)$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{2p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{2p+1} \text{arc.tang.} \frac{x+\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}}{\text{Sin.}\frac{(2k-1)\pi}{2p+1}} + C. \quad (90)$$

$$\int \frac{x^m dx}{1-x^{2p}} =$$

$$= \frac{1}{2p} [-\log.(1-x)+(-1)^m \log.(1+x)]$$

$$- \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Cos.} \frac{2k(m+1)\pi}{2p} \log.(1-2x\text{Cos.}\frac{2k\pi}{2p}+x^2)$$

$$+ \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Sin.} \frac{2k(m+1)\pi}{2p} \text{arc.tang.} \frac{x-\text{Cos.}\frac{2k\pi}{2p}}{\text{Sin.}\frac{2k\pi}{2p}} + C., \quad (91)$$

$$\int \frac{x^m dx}{1-x^{2p}} =$$

$$= \frac{1}{2p} [-\log.(1-x)+(-1)^m \log.(1+x)]$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Cos.} \frac{2k(m+1)\pi}{2p} \log.(1+2x\text{Cos.}\frac{2k\pi}{2p}+x^2)$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Sin.} \frac{2k(m+1)\pi}{2p} \text{arc.tang.} \frac{x+\text{Cos.}\frac{2k\pi}{2p}}{\text{Sin.}\frac{2k\pi}{2p}} + C. \quad (92)$$

66. Den zweiten allgemeinen Fall, wo nach der Methode des Zerlegens die Integration gelingt, stellt das Integrale:

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

dar, wo $\varphi(x)$ eine algebraische, rationale Function von x bedeutet.

Behandelt man die Function $\varphi(x)$, wie in Nr. 63 mitgetheilt worden ist, so hängt die Bestimmung des vorgelegten Integrals von einer endlichen Summe Integralausdrücken, wie die folgenden:

$$1) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}, \qquad 2) \int \frac{dx}{(a'+b'x)^k \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

$$3) \int \frac{(A+Bx)dx}{(a^2+2abx\text{Cos.}\theta+x^2)^h \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

ab, wo m, k, h, ganze, positive Zahlen und α, β, γ, a', b', a, b, A, B, beliebige reelle Constanten vorstellen.

Das Integrale 1) kann man mit Zuziehung der Recursionsgleichung (73) Nr. 58 und nach den daselbst gemachten Mittheilungen behandeln.

Das Integrale 2) haben wir Nr. 60 behandelt.

Endlich haben wir das Integrale 3) Nr. 64 behandeln gelehrt. Auch für diesen Fall werden wir in den nächst folgenden Nrn. einige Anwendungen mittheilen.

67. Das Integrale, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen, wird folgendes sein:

$$\int \frac{x^m dx}{(1 \pm x^n)\sqrt{\pm 1 \mp x^2}},$$

wo m und n ganze positive Zahlen sind und, wie vorhin, $m < n$ vorausgesetzt bleibt.

In diesem Falle verlangt die Deutlichkeit, daß die vier Fälle:

$$n = 4p, \quad n = 4p+1, \quad n = 4p+2, \quad n = 4p+3,$$

abgesondert behandelt werden.

Setzt man in die Gleichung (81) Nr. 64, 2p statt p und bedenkt die Gleichung:

$$\text{Cos.}\,\frac{4p-k}{4p}\,m^1\pi = (-1)^{m^1}\,\text{Cos.}\,\frac{km^1\pi}{4p} \tag{a}$$

wo m^1 eine beliebige ganze Zahl vorstellt, so hat man:

Addirt man diese Gleichung zur vorhergehenden in y, multiplicirt die Summe mit $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, so erhält man, vermöge der obigen Gleichung, den Werth von u. In diesem Resultate y in x durch die Gleichung:

$$y = \frac{1+x}{1-x},$$

umgesetzt, erhält man den anfänglich aufgestellten Werth von u oder man erhält die Gleichung:

$$\int \frac{dx}{(1+2x\,Cos.\theta+x^2)\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,Sin.\frac{1}{2}\theta\sqrt{Cos.\theta}}\ arc.tang.\ \frac{(1+x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}Sin.\frac{1}{2}\theta.\ \sqrt{1+x^2}}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{Cos.\theta}}\ log.\ \frac{1-\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}Cos.\frac{1}{2}\theta.\sqrt{1+x^2}}}{1+\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}} + C. \quad (101)$$

Geht hier x in $\frac{1}{x}$ um, so hat man auch:

$$\int \frac{xdx}{(1+2x\,Cos.\theta+x^2\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}\,Sin.\frac{1}{2}\theta\sqrt{Cos.\theta}}\ arc.tang.\ \frac{(1+x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,.\,Sin.\frac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{1+x^2}}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{Cos.\theta}}\ log.\ \frac{1-\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}}{1+\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}} + C. \quad (102)$$

Es erzeugen daher die letzten zwei Gleichungen folgende Gleichung:

$$\int \frac{Cos.m\theta + xCos.(m+1)\theta}{(1+2x\,Cos.\theta+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{Sin.\frac{2m+1}{2}\theta}{\sqrt{2}\sqrt{Cos.\theta}}\ arc.tang.\ \frac{(1+x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Sin.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}$$

$$+ \frac{Cos.\frac{2m+1}{2}\theta}{2\sqrt{2}\sqrt{Cos.\theta}}\ log.\ \frac{1-\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}}{1+\dfrac{(1-x)\sqrt{Cos.\theta}}{\sqrt{2}\,Cos.\frac{1}{2}\theta\sqrt{1+x^2}}} + C. \quad (\alpha)$$

Wenn hier $-x$ statt x gesetzt wird, hat man auch:

Setzt man ferner in die Gleichung (86) zuerst 2p und hierauf 2p+1 statt p, so hat man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{x^m}{1-x^{4p}} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^m}{1+x}\right) + \frac{1}{2p} \cdot \frac{\text{Cos.}\,\frac{m\pi}{2} + x\,\text{Sin.}\,\frac{m\pi}{2}}{1+x^2}$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{4p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\text{Cos.}\,\frac{2km\pi}{4p} + x\,\text{Cos.}\,\frac{2k(m+1)\pi}{4p}}{1+2x\,\text{Cos.}\,\frac{2k\pi}{4p} + x^2}$$

$$+ \frac{2}{4p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\text{Cos.}\,\frac{2km\pi}{4p} - x\,\text{Cos.}\,\frac{2k(m+1)\pi}{4p}}{1-2x\,\text{Cos.}\,\frac{2k\pi}{4p} + x^2}, \qquad (97)$$

$$\frac{x^m}{1-x^{4p+2}} = \frac{1}{4p+2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^m}{1+x}\right)$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{4p+2} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}\,\frac{2km\pi}{4p+2} + x\,\text{Cos.}\,\frac{2k(m+1)\pi}{4p+2}}{1+2x\,\text{Cos.}\,\frac{2k\pi}{4p+2} + x^2}$$

$$+ \frac{2}{4p+2} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}\,\frac{2km\pi}{4p+2} - x\,\text{Cos.}\,\frac{2k(m+1)\pi}{4p+2}}{1-2x\,\text{Cos.}\,\frac{2k\pi}{4p+2} + x^2}. \qquad (98)$$

Läßt man endlich in den oben aufgestellten zwei Gleichungen (95) und (96) x in −x übergehen, so hat man auch:

$$\frac{x^m}{1-x^{4p+1}} = \frac{1}{4p+1} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{4p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)m\pi}{4p+1} + x\,\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)(m+1)\pi}{4p+1}}{1+2x\,\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)\pi}{4p+1} + x^2}$$

$$+ \frac{2}{4p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}\,\frac{2km\pi}{4p+1} - x\,\text{Cos.}\,\frac{2k(m+1)\pi}{4p+1}}{1-2x\,\text{Cos.}\,\frac{2k\pi}{4p+1} + x^2}, \qquad (99)$$

$$\frac{x^m}{1-x^{4p+3}} = \frac{1}{4p+3} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$+ \frac{2(-1)^m}{4p+3} \sum_{k=1}^{k=p+1} \frac{\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)m\pi}{4p+3} + x\,\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)(m+1)\pi}{4p+3}}{1+2x\,\text{Cos.}\,\frac{(2k-1)\pi}{4p+3} + x^2}$$

$$+$$

$$+\frac{2}{4p+3}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\operatorname{Cos.}\frac{2km\pi}{4p+3}-x\operatorname{Cos.}\frac{2k(m+1)\pi}{4p+3}}{1-2x\operatorname{Cos.}\frac{2k\pi}{4p+3}+x^2}. \qquad (100)$$

Multiplicirt man die hier aufgestellten Gleichungen mit:

$$\frac{dx}{\sqrt{\pm 1 \mp x^2}},$$

dann hängt die Bestimmung des vorgelegten Integrals von der Ausmittelung der Werthe folgender Integralausdrücke ab:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{\pm1\mp x^2}}, \qquad \int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\pm1\mp x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\pm1\mp x^2}},$$

$$\int\frac{\operatorname{Cos.}m\theta\pm x\operatorname{Cos.}(m+1)\theta}{(1\pm2x\operatorname{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{\pm1\mp x^2}},$$

wo $\theta > 0$ und $< \frac{\pi}{2}$ und m eine beliebige ganze, positive Zahl ist.

Die zwei ersten dieser Integralien folgen aus den in Nr. 47 aufgestellten Gleichungen, das dritte Integrale wird eine der Gleichungen (α^1), (β^1) . . . (ζ^1) Nr. 48 geben; blos der Fall:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},$$

des dritten Integrals ist in den so eben citirten Gleichungen nicht enthalten, allein setzt man in die abgeleitete Gleichung (8),

$$n=2, \quad m=-\tfrac{1}{2}, \quad a=1, \quad b=1,$$

so hat man:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

wodurch auch dieser Fall ausgemittelt erscheint.

Es erübriget uns somit nur noch die Ausmittelung des vierten der oben aufgestellten Integralien, womit wir uns in der nächsten Nr. beschäftigen werden.

68. Die Deutlichkeit verlangt ferner, daß auch die verschiedenen, möglichen Zusammenstellungen der Zeichen unter dem Wurzelzeichen dieses vierten Integrals abgesondert behandelt werden.

I) Setzt man in die Gleichungen Nr. 54:

$$a=1, \quad b=1, \quad \alpha=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=1,$$

so giebt die daselbst aufgestellte Gleichung, (q):

$$M = o\,,$$

daher geben die dortigen Gleichungen (r) und (s):

$$\mu = 1\,, \qquad \lambda = -1\,,$$

$$A^2 = 2(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta)^2\,, \qquad B^2 = 2(\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta)^2\,.$$

Wenn man demnach:

$$u = \int \frac{dx}{(1+2x\,\mathrm{Cos.}\,\theta+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,,$$

setzt, so erhält man durch die Annahme:

$$x = -\frac{1-y}{1+y}\,,$$

die Gleichung:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(1+y)dy}{[(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 + (\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 y^2]\sqrt{1+y^2}}\,.$$

Um diesen Werth von u zu bestimmen, gehen wir zu den Gleichungen Nr. 48 zurück.

Nach der Gleichung (α^1) daselbst hat man:

$$\int \frac{dy}{[(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 + (\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 y^2]\sqrt{1+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}\ \mathrm{arc.tang.}\ \frac{y\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}{\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{1+y^2}}\,,$$

und am gleichen Orte giebt die Gleichung (δ^1):

$$\int \frac{dz}{[(\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 + (\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 z^2]\sqrt{1+z^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}\ \log.\ \frac{\dfrac{z\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{1+z^2}}+1}{\dfrac{z\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\,.\,\sqrt{1+z^2}}-1}\,.$$

Wird in dieser letzten Gleichung z in $\frac{1}{y}$ umgesetzt, so hat man auch:

$$\int \frac{y\,dy}{[(\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 + (\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta)^2 y^2]\sqrt{1+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}\ \log.\ \frac{\dfrac{\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1+y^2}}-1}{\dfrac{\sqrt{\mathrm{Cos.}\,\theta}}{\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1+y^2}}+1}\,.$$

und die Gleichung (β^1) derselben Nr. giebt:

$$\int\frac{dz}{(\theta_2+\theta_1 z^2)\sqrt{\theta_2-\theta_1 z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}.\theta\sqrt{\theta_2}}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{\sqrt{2}\,.\,\theta_1 z}{\sqrt{\theta_2-\theta_1 z^2}}\,;$$

wenn daher in dieser Gleichung $z=\frac{1}{y}$ gesetzt wird, dann hat man:

$$\int\frac{y\,dy}{(\theta_1+y^2\theta_2)\sqrt{-\theta_1+y^2\theta_2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}\,.\,\mathrm{Cos}.\theta\,.\sqrt{\theta_2}}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{\theta_1\sqrt{2}}{\sqrt{-\theta_1+y^2\theta_2}}\,.$$

Addirt man diese Gleichung zur vorhergehenden in y, multiplicirt dann die erhaltene Summe mit:

$$\frac{\mathrm{Cos}.\theta^2}{\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}.\theta\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}} \qquad \text{und setzt} \qquad y=-\frac{\theta_1+x\mathrm{Cos}.\theta}{\theta_2+x\mathrm{Cos}.\theta}\,,$$

so findet man, wenn die Werthe für θ_1 und θ_2 restituirt werden,

$$\int\frac{dx}{(1+2x\mathrm{Cos}.\theta+x^2)\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta(1+\mathrm{Sin}.\theta)}}\log.\frac{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\,.\,\sqrt{1-x^2}}+1}{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\sqrt{1-x^2}}-1}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta(1-\mathrm{Sin}.\theta)}}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\sqrt{1-x^2}}+C. \quad (103)$$

Geht hier x in $\frac{1}{x}$ über und berücksichtiget man die Gleichungen:

$$\log.\frac{A+B\sqrt{-1}}{A-B\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{B}{A}\,,$$

$$\mathrm{arc.tang.}C\sqrt{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1-C}{1+C}\,,$$

so findet man nach einigen Reductionen:

$$\int\frac{x\,dx}{(1+2x\mathrm{Cos}.\theta+x^2)\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta(1-\mathrm{Sin}.\theta)}}\log.\frac{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\sqrt{1-x^2}}+1}{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\sqrt{1-x^2}}-1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta(1+\mathrm{Sin}.\theta)}}\,\mathrm{arc.tg.}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}.\theta}+x\sqrt{1+\mathrm{Sin}.\theta}}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\theta}\,.\,\sqrt{1-x^2}}+C. \quad (104)$$

Man hat demnach:

$$\int\frac{\text{Cos.}m\theta+x\text{Cos.}(m+1)\theta}{(1+2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{\text{Cos.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}+1}$$

$$+\frac{\text{Sin.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}+C.\quad(\gamma)$$

Wird hier x in —x umgesetzt, so hat man auch:

$$\int\frac{\text{Cos.}m\theta-x\text{Cos.}(m+1)\theta}{(1-2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{\text{Cos.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}+1}{\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}-1}$$

$$-\frac{\text{Sin.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{1-x^2}}+C.\quad(\delta)$$

III. Vertauscht man ferner in den Gleichungen (103) und (104) x in $\frac{1}{x}$, dann hat man:

$$\int\frac{xdx}{(1+2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{-1+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{Sin.}\theta(1+\text{Sin.}\theta)}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}-1}{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{Sin.}\theta(1-\text{Sin.}\theta)}}\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+C.\quad(105)$$

$$\int\frac{dx}{(1+2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{-1+x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{Sin.}\theta(1-\text{Sin.}\theta)}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}-1}{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+1}$$

+

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{Sin.}\theta(1+\text{Sin.}\theta)}}\text{arc.tg.}\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+C. \quad (106)$$

daher hat man auch:

$$\int\frac{\text{Cos.m}\theta+x\text{Cos.}(m+1)\theta}{(1+2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{-1+x^2}}dx=$$

$$=\frac{\text{Sin.}(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta)}{2\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+1}{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}-1}$$

$$-\frac{\text{Cos.}(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta)}{\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}+x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+C, \quad (\varepsilon)$$

und wenn x in —x umgesetzt wird:

$$\int\frac{\text{Cos.m}\theta-x\text{Cos.}(m+1)\theta}{(1-2x\text{Cos.}\theta+x^2)\sqrt{-1+x^2}}dx=$$

$$=\frac{\text{Sin.}(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta)}{2\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}-1}{\frac{\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+1}$$

$$+\frac{\text{Cos.}(\frac{\pi}{4}+\frac{2m+1}{2}\theta)}{\sqrt{2}\sqrt{\text{Sin.}\theta}}\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{1+\text{Sin.}\theta}-x\sqrt{1-\text{Sin.}\theta}}{\sqrt{\text{Sin.}\theta}\sqrt{-1+x^2}}+C. \quad (\zeta)$$

69. Es giebt also die in Nr. (67) aufgestellte Gleichung (93), mit den Gleichungen (α) und (β) der vorhergehenden Nr. vereint, wenn der Kürze wegen:

$$\frac{2m+1}{2}=m',$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int\frac{x^m dx}{(1+x^{4r})\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{(-1)^m}{4p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\text{Cos.m}'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}\log.\frac{1-\frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

—

$$- \frac{1}{4p\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2p\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}$$

$$- \frac{1}{2p\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}} + C. \quad (107)$$

wo der Kürze wegen:

$$\theta_k = \frac{2k-1}{4p}\pi ,$$

gesetzt worden ist.

Eben so giebt die Gleichung (95) mit Zuziehung derselben Gleichungen (α) und (β) und der Gleichung (30) Nr. 46:

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^{4p+1})\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(4p+1)\sqrt{2}} \log. \frac{1-x-\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}{1+x}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{(4p+1)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$- \frac{1}{(4p+1)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta'_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta'_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta'_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}(-1)^m}{4p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{4p+1} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta'_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta'_k\sqrt{1+x^2}} + C. \quad (108)$$

wo der Kürze wegen:

$$\theta_k = \frac{2k}{4p+1}\pi \quad \text{und} \quad \theta'_k = \frac{2k-1}{4p+1}\pi ,$$

gesetzt worden ist.

Ferner giebt die Gleichung (94):

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^{4p+2})\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2p+1}\left(\frac{\text{Sin.}\frac{m\pi}{2} - x\text{Cos.}\frac{m\pi}{2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{(4p+2)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$- \frac{1}{(4p+2)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{(2p+1)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}$$

$$- \frac{1}{(2p+1)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \text{arc.tang.} \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}} + C. \quad (109)$$

wo der Kürze wegen:

$$\theta_k = \frac{2k-1}{4p+2}\pi,$$

gesetzt worden ist.

Die Gleichung (96) giebt:

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^{4p+3})\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(4p+3)\sqrt{2}} \log. \frac{1-x-\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}{1+x}$$

$$+ \frac{(-1)^m}{(4p+3)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\text{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1-x)\sqrt{\text{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$- \frac{1}{(4p+3)\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{k=p+1} \frac{\text{Cos.}m'\theta'_k}{\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}} \log. \frac{1 - \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta'_k\sqrt{1+x^2}}}{1 + \frac{(1+x)\sqrt{\text{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}\text{Cos.}\frac{1}{2}\theta'_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$+$

$$+\frac{\sqrt{2}.(-1)^m}{4p+3}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{(1+x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4p+3}\sum_{k=1}^{k=p+1}\frac{\mathrm{Sin.}m'\theta'_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta'_k}}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{(1-x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta'_k}}{\sqrt{2}.\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}\theta'_k.\sqrt{1+x^2}}+C. \quad (110)$$

wo abkürzend,

$$\theta_k=\frac{2k}{4p+3}\pi \quad \text{und} \quad \theta'_k=\frac{2k-1}{4p+3}\pi,$$

angenommen ward.

Endlich geben die Gleichungen (97) und (98) Nr. 67 folgende zwei Gleichungen:

$$\int\frac{x^m dx}{(1-x^{4p})\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2p}\left(\frac{\mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}-x\,\mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$+\frac{1}{4p\sqrt{2}}\left\{\log.\frac{1+x+\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}{1-x}+(-1)^m\log.\frac{1-x-\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}{1+x}\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{4p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}\log.\frac{1-\frac{(1-x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{(1-x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$-\frac{1}{4p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Cos.}m'\theta_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}\log.\frac{1-\frac{(1+x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}{1+\frac{(1+x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}}$$

$$+\frac{(-1)^m}{2p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{(1+x)\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}$$

$$-\frac{1}{2p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Sin.}m'\theta_k}{\sqrt{\mathrm{Cos.}\theta_k}}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{(1-x)\sqrt{\mathrm{Cos}\,\theta_k}}{\sqrt{2}\mathrm{Sin.}\frac{1}{2}\theta_k\sqrt{1+x^2}}+C. \quad (111)$$

wo man

$$\theta_k=\frac{2k}{4p}\pi,$$

hat, und:

Die Gleichung (83) aus Nr. (65) giebt endlich, wenn man:

$$\theta''_k = \frac{2k-1}{2p+1}\pi ,$$

setzt, die Gleichung:

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^{2p+1})\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{(-1)^m}{2p+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2(2p+1)}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Cos.}(m'\theta''_k + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k} - x\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,.\,\sqrt{1-x^2}} + 1}{\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k} - x\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,.\,\sqrt{1-x^2}} - 1}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2p+1}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Sin.}(m'\theta''_k + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}}\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k} - x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,\sqrt{1-x^2}} + C. \quad (115)$$

Wird hier x in —x umgesetzt, so erscheint auch der Werth des Integralausdruckes:

$$\int \frac{x^m dx}{(1-x^{2p+1})\sqrt{1-x^2}} ,$$

gegeben; wodurch das zu Anfang dieser Nr. vorgelegte Integrale, wenn $n > m$ bleibt, für alle Fälle in denen n und m ganze, positive Zahlenwerthe vorstellen, gegeben erscheint.

71. Um endlich den Integralausdruck:

$$\int \frac{x^m dx}{(1 \pm x^n)\sqrt{-1+x^2}} ,$$

zu bestimmen, legen wir die Gleichung (ξ) Nr. (68) zu Grunde. Mittelst derselben findet man, wenn die in der vorangehenden Nr. gemachte Bemerkung, die Größe n betreffend, auch hier beachtet wird, und wenn die daselbst für die Größen θ_k, θ'_k, θ''_k, festgesetzten Werthe beibehalten werden, folgende drei Gleichungen:

$$\int \frac{x^m dx}{(1+x^{2p})\sqrt{-1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Sin.}(m'\theta_k + \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta_k}}\log.\frac{\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta_k} - x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta_k}\,\sqrt{-1+x^2}} - 1}{\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta_k} - x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta_k}\,\sqrt{-1+x^2}} + 1}$$

+

$$+\frac{1}{p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Cos.}(m'\theta_k+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta_k}}\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta_k}-x\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}+C.\quad(116)$$

$$\int\frac{x^m dx}{(1-x^{2p})\sqrt{-1+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2p}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(-1)^m\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

$$+\frac{1}{2p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Sin.}(m'\theta'_k+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta'_k}}\log.\frac{\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta'_k}-x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta'_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta'_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}-1}{\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta'_k}-x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta'_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta'_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}+1}$$

$$+\frac{1}{p\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\mathrm{Cos.}(m'\theta'_k+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta'_k}}\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta'_k}-x\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta'_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta'_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}+C.\quad(117)$$

$$\int\frac{x^m dx}{(1+x^{2p+1})\sqrt{-1+x^2}}=$$

$$=\frac{(-1)^m}{2p+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2(2p+1)}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Cos.}(m'\theta''_k+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}}\log.\frac{\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k}-x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}-1}{\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k}-x\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,.\,\sqrt{-1+x^2}}+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2p+1}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\mathrm{Sin.}(m'\theta''_k+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}}\mathrm{arc.tg.}\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin.}\theta''_k}-x\sqrt{1-\mathrm{Sin.}\theta''_k}}{\sqrt{\mathrm{Sin.}\theta''_k}\,\sqrt{-1+x^2}}+C.(118)$$

Durch das Umsetzen von x in $-x$, in dieser letzten Gleichung, ergiebt sich auch der Werth des Integralausdruckes:

$$\int\frac{x^m dx}{(1-x^{2p+1})\sqrt{-1+x^2}}.$$

Somit haben wir das anfangs Nr. 67 vorgelegte Integrale für alle möglichen Zeichencombinationen der in den Nennern vorkommenden Binomien gelöst und fügen, zur Vermeidung möglicher Irrungen, die schon gemachte Bemerkung nochmals bei, daß die gebrochene rationale Function:

$$\frac{x^m}{1\pm x^n},$$

in der die ganze Zahl n einen der Werthe:

$$4p, \quad 4p+1, \quad 4p+2, \quad 4p+3, \quad 2p, \quad 2p+1,$$

vorstellt, zu den sogenannten echtgebrochenen Functionen gehörend in allen vorangeschickten Gleichungen vorausgesetzt worden sei.

72. Die verschiedenen bisher entwickelten Integrationsmethoden benutzten wir bis jetzt ausschließlich zur Herstellung der Integralfunctionen solcher Differenzialformeln oder Differenzialfunctionen, die wir in der Einleitung Nr. 2 zu den algebraischen gezählt haben. Fortan werden wir uns sowohl der bereits mitgetheilten, als der noch im folgenden Paragraphe zu erörternden Integrationsmethoden abwechselnd bedienen, um theils algebraische und theils exponentielle (Einleitung Nr. 9) Differenzialfunctionen zu integriren.

---

§. VI.

Integriren nach der Ableitungsmethode mittelst Differenziation und Integration nach einer allgemeinen, von den Variablen unabhängigen Größe.

73. Im §. II Nr. 41 basirten wir die Ableitungsmethode auf die Eigenschaft der Identität, die zwischen dem Integralausdrucke und der Integralfunction Statt findet. Das gleiche Prinzip der Identität legen wir auch in dem Folgenden zu Grunde, und gehen nur von der Voraussetzung aus, daß in der zu integrirenden Differenzialformel eine von der Variablen x, nach der die Integration vollzogen werden soll, unabhängige, übrigens völlig allgemeine Größe noch vorkömmt. Stellt nämlich $\varphi(x,a)$ irgend eine Function von x und a dar, und wird a als diese von x unabhängige, allgemeine Größe betrachtet, so wird auch der Integralausdruck:

$$\int \varphi(x,a)\,dx\,,$$

eine Function von x und a sein müssen.

Wenn daher, dieses vorausgesetzt, diese Integralfunction durch F(x,a) dargestellt wird, so daß man die Gleichung:

$$\int \varphi(x,a)\,dx = F(x,a)\,, \tag{A}$$

annimmt, dann besteht auch die Gleichung:

$$\frac{d.\,F(x,a)}{dx} = \varphi(x,a)\,. \tag{B}$$

I. Findet nun die Gleichung (A) für irgend eine endliche Folge von Werthen der allgemeinen, von x unabhängigen Größe a Statt, dann besteht im ganzen Bereiche dieser Werthenfolge auch noch die Gleichung:

$$\int \varphi(x, a+\omega)\,dx = F(x, a+\omega) ,$$

wo ω eine unendlich klein werdende Größe bedeutet.

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (A) und mit Zuziehung der in der Differenzialrechnung Nr. 16 u. f. f. gewonnenen Resultaten erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{d. \int \varphi(x,a)dx}{da} = \frac{d. F(x,a)}{da} . \qquad (C)$$

Dieses Resultat setzt voraus, daß der Integralausdruck $\int\varphi(x,a)dx$ oder dessen Werth F(x,a) eine in Bezug auf a continuirliche Function vorstellt. Ist noch überdieß auch $\varphi(x,a)$ eine continuirliche Function der allgemeinen Größe a, so hat man auch:

$$\varphi(x, a+\omega) = \varphi(x, a) + \omega \frac{d. \varphi(x,a)}{da} ,$$

und da man unter der getroffenen Annahme,

$$F(x, a+\omega) = F(x, a) + \omega \frac{d. F(x,a)}{da} ,$$

setzen darf; so giebt die Gleichung (A), wenn daselbst a in a + ω umgesetzt wird, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors ω, folgende Gleichung:

$$\int \frac{d. \varphi(x,a)}{da} dx = \frac{d. F(x,a)}{da} . \qquad (D)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (C), so hat man auch:

$$\frac{d. \int \varphi(x,a)dx}{da} = \int \frac{d. \varphi(x,a)}{da} dx , \qquad (E)$$

welche Gleichung, mit der Gleichung (D) vereint, das Verfahren angiebt, aus einer Gleichung wie (A), durch Differenziation derselben nach der von x unabhängigen allgemeinen Größe a, die Werthe neuer Integralausdrücke abzuleiten.

II. Eben so wollen wir nun darthun, wie in vielen Fällen durch eine Integration nach der allgemeinen Größe a, die Werthe neuer Integralausdrücke abzuleiten seien.

Multiplicirt man die Gleichung (B) mit da und zeigt zu beiden

Seiten des Gleichheitszeichens die Integration nach a an, so erhält man zunächst:

$$\int \frac{d.\,F(x,a)}{dx}\,da = \int \varphi(x,a)da \;,$$

oder vermöge der Gleichung (E), da x unabhängig von a ist, die folgende Gleichung:

$$\frac{d.\int F(x,a)\,da}{dx} = \int \varphi(x,a)\,da \;.$$

Da $\int \varphi(x,a)da$ eine Function von x und a ist, so wird man, wenn diese letzte Gleichung mit dx multiplicirt und nach x integrirt wird, vermöge der allgemeinen Gleichung:

$$\int \frac{dP}{dx}\,dx = P \;,$$

auch folgende Gleichung haben:

$$\int F(x,a)\,da = \int [\int \varphi(x,a)\,da]dx \;;$$

allein wenn man die Gleichung (A) mit da multiplicirt und nach a integrirt, hat man auch:

$$\int [\int \varphi(x,a)dx]da = \int F(x,a)\,da \;, \tag{F}$$

daher ergiebt sich, wenn diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen wird, auch folgende Gleichung:

$$\int [\int \varphi(x,a)\,dx]\,da = \int [\int \varphi(x,a)\,da]\,dx \;. \tag{G}$$

Diese so eben aufgestellten zwei Gleichungen enthalten die nöthigen Vorschriften, wie durch eine Integration nach einer von x unabhängigen allgemeinen Größe a, zu den Werthen neuer Integralausdrücke zu gelangen sei.

In der Anwendung der in dieser Nr. aufgestellten Gleichungen besteht das Eigenthümliche des in der Ueberschrift dieses Paragraphen angezeigten Integrationsverfahrens.

74. In dieser Nr. werden wir durch Differenziation nach einer allgemeinen, constanten Größe die Werthe einiger Integralien abzuleiten suchen.

I. Läßt man in der Fundamentalgleichung (I) Nr. 38 m in m+1 übergehen, so hat man, wenn von der Integrationsconstante abstrahirt wird, die Gleichung:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \;.$$

Diese Gleichung besteht bekanntlich für alle Werthe von m, die negative Einheit ausgenommen; daher hat man, wenn die Gleichungen (D) und (E) auf diesen besondern Fall angewandt werden, oder, wenn die so eben aufgestellte Gleichung mit Zuziehung der Gleichung (E) nach m differenzirt wird,

$$\int x^m \log.x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log.x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + \text{Const.} \qquad (119)$$

II. Eben so giebt die Fundamentalgleichung (II) Nr. 38, die für alle Werthe von a, ausgenommen die Einheit, Statt findet, wenn man dieselbe nach a differenzirt, die Gleichung:

$$\int a^x x\, dx = \frac{xa^x}{\log.a} - \frac{a^x}{(\log.a)^2} + \text{Const.} \qquad (120)$$

III. Ferner giebt die abgeleitete Fundamentalgleichung (7) Nr. 39, wenn zuerst m in m + 1 umgesetzt und hierauf nach m differenzirt wird, die Gleichung:

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^m \log.(a+bx^n)\, dx =$$
$$= \frac{(a+bx^n)^{m+1}}{(m+1)nb}\log.(a+bx^n) - \frac{(a+bx^n)^{m+1}}{(m+1)^2 nb} + \text{Const.} \qquad (121)$$

IV. Die Gleichungen (10) Nr. 40 geben zuerst, wenn x in mx umgesetzt wird,

$$\int \text{Sin}.mx\, dx = -\frac{1}{m}\text{Cos}.mx\ ,$$

$$\int \text{Cos}.mx\, dx = +\frac{1}{m}\text{Sin}.mx\ ;$$

werden diese für alle Werthe von m, Null ausgenommen, stattfindenden Gleichungen nach m differenzirt, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\int x\,\text{Cos}.mx\,dx = \frac{x}{m}\text{Sin}.mx + \frac{1}{m^2}\text{Cos}.mx + \text{Const.}\\ \int x\,\text{Sin}.mx\,dx = -\frac{x}{m}\text{Cos}.mx + \frac{1}{m^2}\text{Sin}.mx + \text{Const.}\end{array}\right\} \qquad (122)$$

75. Gleich wie in der vorhergehenden Nr. durchs Differenziren nach einer allgemeinen Constante die Werthe einiger Integralausdrücke erhalten worden sind, eben so wollen wir auch durchs Integriren nach einer solchen allgemeinen Constante einige Integralausdrücke zu bestimmen suchen.

I. Die abgeleitete Grundgleichung (12) Nr. 40 giebt, wenn man x in ax umsetzt:

$$\int \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \text{arc.Sin.}ax .$$

Diese Gleichung mit da multiplicirt und nach a integrirt, giebt:

$$\int \left\{ \int \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}} \right\} da = \int \text{arc.Sin.}ax.da .$$

Allein nach Gleichung (G) Nr. 73 hat man:

$$\int \left\{ \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}} \right\} da = \int \left\{ \int \frac{ada}{\sqrt{1-a^2x^2}} \right\} dx ,$$

und aus Gleichung (7) Nr. 39 folgert man sehr leicht:

$$\int \frac{ada}{\sqrt{1-a^2x^2}} = -\frac{1}{x^2} \sqrt{1-a^2x^2} ;$$

daher hat man:

$$\int \text{arc.Sin.}ax da = -\int \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{x^2} dx .$$

Setzt man hier x in $\frac{1}{x}$ um, so hat man:

$$\int \text{arc.Sin.}\frac{a}{x} da = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx ,$$

oder auch:

$$\int \text{arc.Sin.}\frac{a}{x} da = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} ,$$

also erhält man, vermöge der Gleichungen (7) und (25) der Nrn. 39 und 45, die Gleichung:

$$\int \text{arc.Sin.}\frac{a}{x} da = \sqrt{x^2-a^2} + a . \text{arc.Sin.}\frac{a}{x} ,$$

oder wenn a mit x vertauscht wird:

$$\int \text{arc.Sin.}\frac{x}{a} dx = \sqrt{a^2-x^2} + x . \text{arc.Sin.}\frac{x}{a} + \text{Const.} \tag{123}$$

Bedenkt man ferner die Gleichung:

$$\text{arc.Sin.}\frac{x}{a} + \text{arc.Cos.}\frac{x}{a} = \text{arc.Sin.}1 = \frac{\pi}{2} ,$$

so hat man auch:

$$\int \text{arc.Cos.}\frac{x}{a} dx = -\sqrt{a^2-x^2} + x . \text{arc.Cos.}\frac{x}{a} + \text{Const.} \tag{124}$$

II. Setzt man in die Gleichung (14) Nr. 42:

$$a = 1 , \quad b = \alpha ,$$

so findet man:

$$\int \frac{2\alpha dx}{1-\alpha^2x^2} = \log.(1+\alpha x) - \log.(1-\alpha x) .$$

Wird diese Gleichung mit $d\alpha$ multiplicirt und nach α integrirt, so hat man mit Zuziehung der Gleichung (G) Nr. 73:

$$\int \log.(1-\alpha^2x^2)\frac{dx}{x^2} = \int \log.(1-x\alpha)d\alpha - \int \log.(1+x\alpha)d\alpha \; .$$

Wenn nun in Gleichung (119) $m=o$ angenommen, hierauf x in $1-bx$, und in $1+bx$ umgetauscht wird, dann ergiebt sich:

$$\int \log.(1-bx)dx = -\frac{1-bx}{b}\log.(1-bx) + \frac{1-bx}{b} \, ,$$

$$\int \log.(1+bx)dx = +\frac{1+bx}{b}\log.(1+bx) - \frac{1+bx}{b} \; ;$$

wenn daher dieses Ergebniß auf obige Gleichung angewendet und die von x independenten Theile vernachlässigt werden, so hat man:

$$\int \log.(1-\alpha^2x^2)\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\log.(1-\alpha^2x^2) + \alpha\log.\frac{1-\alpha x}{1+\alpha x} \; .$$

Läßt man hier α in $\alpha\sqrt{-1}$ übergehen, so hat man, mit Beachtung einer in Nr. 42 aufgestellten Gleichung,

$$\int \log.(1+\alpha^2x^2)\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\log.(1+\alpha^2x^2) + 2\alpha\,.\,\mathrm{arc.tang.}\alpha x \; ;$$

setzt man in dieser letzten Gleichung x in $\frac{1}{x}$ um, so findet man:

$$\int \log.(\alpha^2+x^2)dx =$$

$$= -2x + x\log.(\alpha^2+x^2) + 2\alpha\,.\,\mathrm{arc.tang.}\frac{x}{\alpha} + \mathrm{Const.} \qquad (125)$$

III. Wird in die Gleichung (15) Nr. 42, $\frac{b}{a}=\alpha$ gesetzt, so erhält man:

$$\int \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2} = \mathrm{arc.tang.}\alpha x \; .$$

Wenn diese Gleichung mit $d\alpha$ multiplicirt und nach α integrirt wird, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Gleichung (G) Nr. 73, folgende Gleichung:

$$\int \log.(1+\alpha^2x^2)\frac{dx}{x^2} = 2\int \mathrm{arc.tang.}\alpha x\, d\alpha \; ;$$

daher hat man, mit Zuziehung der obigen Gleichung, die den Integralausdruck links vom Gleichheitszeichen bestimmt, auch folgende Integralbestimmung:

$$\int \mathrm{arc.tang.}\alpha x d\alpha = \alpha\,.\,\mathrm{arc.tang.}\alpha x - \frac{1}{2x}\log.(1+\alpha^2x^2) \; .$$

Vertauscht man hier α in x und umgekehrt, so geht diese Gleichung über in:

$$\int \text{arc.tang.}\alpha x\, dx = x \text{arc.tang.}\alpha x - \frac{1}{2\alpha}\log.(1+\alpha^2x^2) \;,$$

oder man hat auch:

$$\int \text{arc.tang.}\frac{x}{a} dx = x \,\text{arc.tang.}\frac{x}{a} - a \log.\sqrt{a^2+x^2} + \text{Const.} \qquad (126)$$

IV. Die Gleichung (18) Nr. 43 geht endlich, wenn $b^2 = a^2\alpha^2$ gesetzt wird, über in:

$$\int \frac{\alpha dx}{\sqrt{1+\alpha^2x^2}} = \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) \;;$$

behandelt man diese Gleichung wie die vorangeschickten, so hat man:

$$\int \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) d\alpha = \int \sqrt{1+\alpha^2x^2} \cdot \frac{dx}{x^2} .$$

Setzt man hier x in $\frac{1}{x}$ um, so hat man auch:

$$\int \log.\left(\frac{\alpha}{x} + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) d\alpha = -\int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} - \alpha^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha^2+x^2}} \,,$$

und mit Zuziehung der Gleichung (26) Nr. 45 ergiebt sich:

$$\int \log.\left(\frac{\alpha}{x} + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) d\alpha = -\sqrt{\alpha^2+x^2} - \alpha \log.\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2+x^2}}{x}\right) ,$$

oder auch:

$$\int \log.\left(\frac{\alpha}{x} + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) d\alpha = -\sqrt{\alpha^2+x^2} + \alpha \log.\left(\frac{\alpha}{x} + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) ,$$

und wenn x in $\frac{1}{x}$ umgesetzt wird, hat man:

$$\int \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) d\alpha = -\frac{\sqrt{1+\alpha^2x^2}}{x} + \alpha \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) .$$

Wird endlich α in x umgesetzt und umgekehrt, so hat man:

$$\int \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\alpha^2x^2}}{\alpha} + x \log.(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}) + \text{Const.} \qquad (127)$$

§. VII.

Anwendung sämmtlicher bis jetzt aufgeführten Integrationsmethoden.

76. Setzt man in die Gleichung (14) Nr. 42, $a=1$, $b=1$, und $\text{Cos.}\,x$ statt x, so hat man:

$$\int\frac{dx}{\text{Sin.}x}=\log.\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}x}{1+\text{Cos.}x}}+\text{Const.}\ ,$$

oder auch:

$$\int\frac{dx}{\text{Sin.}x}=\log.\text{Tang.}\frac{x}{2}+\text{Const.}\ ;$$

geht hier x in $\frac{\pi}{2}+x$ über, dann hat man auch:

$$\int\frac{dx}{\text{Cos.}x}=\log.\text{Tang.}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\text{Const.}$$

Sei ferner:

$$u=\int\text{Tang.}x\,dx\ ,$$

so hat man, wenn einstweilen $y=\text{Cos.}\,x$ gesetzt wird,

$$u=-\int\frac{dy}{y}=-\log.y\ ;$$

wird der Werth von y eingesetzt, dann hat man:

$$\int\text{Tang.}x\,dx=-\log.\text{Cos.}x+\text{Const.}\ ;$$

und wenn x in $\frac{\pi}{2}-x$ umgesetzt wird, hat man auch:

$$\int\text{Cotang.}x\,dx=\log.\text{Sin.}x+\text{Const.}$$

Wenn nun in den so eben gefundenen vier Integralausdrücken x in mx übergeht, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{\text{Sin.}mx}=\frac{1}{m}\log.\text{Tang.}\frac{mx}{2}+\text{Const.}\\
&\int\frac{dx}{\text{Cos.}mx}=\frac{1}{m}\log.\text{Tang.}\left(\frac{mx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\text{Const.}\\
&\int\text{Tang.}mx\,dx=-\frac{1}{m}\log.\text{Cos.}mx+\text{Const.}\\
&\int\text{Cotang.}mx\,dx=\frac{1}{m}\log.\text{Sin.}mx+\text{Const.}
\end{aligned}\right\}, \qquad (128)$$

welche für alle Werthe von m, Null ausgenommen, bestehen.

77. Der Integralausdruck:

$$\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n\,dx\,,$$

kann, mit Hülfe der Reductionsgleichungen (60) bis (65) Nr. 56, falls m und n ganze Zahlen sind, entweder von den in der vorhergehenden Nr. aufgestellten Integralausdrücken oder von den Integralausdrücken der Gleichungen (10) Nr. 40 abhängig gemacht werden.

In der That, wird in den eben citirten Reductionsgleichungen,

$$a = 1\,,\qquad b = -1\,,\qquad n = 2\,,\qquad p = n\,,$$

angenommen, und läßt man daselbst x in Cos.x und m in $\frac{m-1}{2}$ übergehen, so hat man folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= + \frac{\operatorname{Sin.}x^{m+1}\operatorname{Cos.}x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{Sin.}x^{m+2}\operatorname{Cos.}x^{n-2}dx\,, \\
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= - \frac{\operatorname{Sin.}x^{m-1}\operatorname{Cos.}x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{Sin.}x^{m-2}\operatorname{Cos.}x^{n+2}dx\,, \\
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= + \frac{\operatorname{Sin.}x^{m+1}\operatorname{Cos.}x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \operatorname{Sin.}x^{m+2}\operatorname{Cos.}x^{n}dx\,, \\
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= - \frac{\operatorname{Sin.}x^{m-1}\operatorname{Cos.}x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{Sin.}x^{m-2}\operatorname{Cos.}x^{n}dx\,, \\
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= + \frac{\operatorname{Sin.}x^{m+1}\operatorname{Cos.}x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{Sin.}x^{m}\operatorname{Cos.}x^{n-2}dx\,, \\
&\int \operatorname{Sin.}x^m \operatorname{Cos.}x^n dx = \\
&= - \frac{\operatorname{Sin.}x^{m+1}\operatorname{Cos.}x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \operatorname{Sin.}x^{m}\operatorname{Cos.}x^{n+2}dx\,.
\end{aligned}\right\}\quad(129)$$

Je nach Beschaffenheit der ganzen Zahlen m und n, wird man eine oder mehrere der so eben aufgestellten Reductionsgleichungen zu Grunde legen, um den vorgelegten Integralausdruck auf irgend einen der oben angeführten Integralausdrücke zurückzubringen.

78. Setzt man in die Gleichungen (β), (ε), (β^1) Nr. 48: $a=1$,

$\gamma=1$, vertauscht dann x in Cos.x, so gehen folgende Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dx}{a^2-b^2\mathrm{Cos.}x^2}=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc.tang.}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{tang.}x\right)+C.\\
&\int\frac{dx}{a^2-b^2\mathrm{Cos.}x^2}=\frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\,\log.\frac{1-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tang.}x}{1+\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tang.}x}+C.\\
&\int\frac{dx}{a^2+b^2\mathrm{Cos.}x^2}=\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{arc.tang.}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{tang.}x\right)+C.
\end{aligned}\right\}\quad(130)$$

Bedenkt man die Gleichung:

$$\mathrm{Cos.}x^2=\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{Cos.}2x)\ ,$$

so hat man, wenn in der letzten der obigen Gleichungen x in $\frac{x}{2}$ umgesetzt wird und

$$2a^2+b^2=\alpha\ ,\qquad b^2=\beta\ ,$$

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta\mathrm{Cos.}x}=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\,\mathrm{arc.tang.}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\mathrm{tang.}\frac{x}{2}\right)+C.\qquad(131)$$

Ist α numerisch kleiner als β, dann berücksichtige man die Gleichung:

$$\mathrm{arc.tang.}u\sqrt{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\log.\frac{1-u}{1+u}\ ,$$

wodurch auch folgende Gleichung erzeugt wird:

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta\mathrm{Cos.}x}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\,\log.\frac{1+\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}\,\mathrm{tang.}\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}}\,\mathrm{tang.}\frac{x}{2}}+C.\qquad(132)$$

Diese und die vorangehende Gleichung ergänzen sich gegenseitig.

Für den Fall endlich, wenn man $\alpha=\beta$ hat, dann hat man, wegen

$$1+\mathrm{Cos.}x=2\left(\mathrm{Cos.}\frac{x}{2}\right)^2\ ,$$

und vermöge der Gleichung:

$$\int\frac{dx}{\mathrm{Cos.}x^2}=\frac{\mathrm{Sin.}x}{\mathrm{Cos.}x}=\mathrm{tang.}x\ ,$$

die aus der letzten der Recursionsgleichungen der vorhergehenden Nr., wenn man $m=0$ und $n=-2$ annimmt, hervorgeht, die Gleichung:

$$\int \frac{dx}{1 + \text{Cos.}x} = \text{tang.}\frac{x}{2} + \text{Const.}\,, \qquad (133)$$

welche Gleichung die Lücke, die die Gleichungen (131) und (132) für $\alpha = \beta$ lassen, ausfüllt.

79. Wird in der Gleichung (76) Nr. 60 folgende Annahme getroffen,

$$\alpha^1 = 1\,,\quad \beta^1 = 0\,,\quad \gamma^1 = -1\,,\quad a = \alpha\,,\quad b = \beta\,,$$

und wird überdieß x in Cos.x umgesetzt, so hat man, bei der Annahme:

$$X_m = \int \frac{dx}{(\alpha + \beta \text{Cos.}x)^m}\,, \qquad (134)$$

nach Gleichung (77) derselben Nr., folgende Recursionsgleichung zur Bestimmung von X_m:

$$(m-1)(\beta^2 - \alpha^2)X_m + (2m-3)\alpha X_{m-1} - (m-2)X_{m-2} = \frac{\beta \text{Sin.}x}{(\alpha + \beta \text{Cos.}x)^{m-1}} \qquad (135)$$

Setzt man hier m=2, so ist:

$$(\beta^2 - \alpha^2)X_2 + \alpha X_1 = \frac{\beta \text{Sin.}x}{\alpha + \beta \text{Cos.}x}\,,$$

woraus hervorgeht, daß man den Werth von X_m durch X_1 *ausdrücken* kann; diese letzte Größe ist das in der vorhergehenden Nr. bestimmte Integrale, daher kann auch X_m, jedesmal, als *angebbar* angesehen werden.

80. Um die Werthe folgender Integralausdrücke:

$\int \text{Sin.}mx\,\text{Sin.}nx\,dx$, $\int \text{Cos.}mx\,\text{Cos.}nx\,dx$, $\int \text{Sin.}mx\,\text{Cos.}nx\,dx$,
zu erhalten, zerlege man die Producte:

Sin.mx Sin.nx , Cos.mx Cos.nx , Sin.mx Cos.nx ,

in Summen, wodurch mit Beachtung der Gleichungen,

$$\left.\begin{aligned} \int \text{Sin.}kx\,dx &= -\frac{1}{k}\text{Cos.}kx + \text{Const.} \\ \int \text{Cos.}kx\,dx &= +\frac{1}{k}\text{Sin.}kx + \text{Const.} \end{aligned}\right\}, \qquad (136)$$

die aus den abgeleiteten Fundamentalgleichungen (10) Nr. 40 folgen, sogleich folgende Resultate erhalten werden:

$$\int \text{Sin.}mx\,\text{Sin.}nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\,\text{Sin.}(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\text{Sin.}(m+n)x + C. \qquad (137)$$

$$\int \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\,\mathrm{Sin.}(m-n)x + \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{Sin.}(m+n)x + C. \qquad (138)$$

$$\int \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}nx\,dx =$$

$$= \frac{-1}{2(m-n)}\,\mathrm{Cos.}(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\,\mathrm{Cos.}(m+n)x + C. \qquad (139)$$

81. Nicht so einfach ist der Weg, der zur Kenntniß der Werthe folgender Integralausdrücke führt:

$$\int\frac{\mathrm{Sin.}qx}{\mathrm{Sin.}px}\,dx\,,\quad \int\frac{\mathrm{Cos.}qx}{\mathrm{Cos.}px}\,dx\,,\quad \int\frac{\mathrm{Sin.}qx}{\mathrm{Cos.}px}\,dx\,,\quad \int\frac{\mathrm{Cos.}qx}{\mathrm{Sin.}px}\,dx.$$

Wir werden diese Integralien nach der Ableitungsmethode §. II, mit Zugrundelegung der Gleichung (91) Nr. 65, zu bestimmen suchen.

Setzt man in diese Gleichung:

$$\mathrm{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x \quad \text{statt} \quad x\,,$$

so hat man, für den Differenzialausdruck links vom Gleichheitszeichen derselben, folgende abgeleitete Gleichung:

$$\frac{x^m dx}{1-x^{2p}} = -\frac{\mathrm{Cos.}(p-m-1)x}{2\,\mathrm{Sin.}px}\,dx + \sqrt{-1}\,\frac{\mathrm{Sin.}(p-m-1)x}{2\,\mathrm{Sin.}px}\,dx\,.$$

Bedenkt man ferner die Richtigkeit folgender zwei Gleichheiten:

$$\left.\begin{array}{l} \log.(A+B\sqrt{-1}) = \log.\sqrt{A^2+B^2} + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\dfrac{B}{A}\,, \\ \mathrm{arc.tang.}(A+B\sqrt{-1}) = \\ = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc.tang.}\dfrac{2A}{1-A^2-B^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\log.\sqrt{\dfrac{A^2+(1+B)^2}{A^2+(1-B)^2}}\,, \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

so entspringen folgende abgeleitete Gleichungen:

$$\log.(1+x) = \log.2 + \log.\mathrm{Cos.}\frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,x\,.$$

$$\log.(1-x) = \log.2 + \log.\mathrm{Sin.}\frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,x\,.$$

$$\log.(1-2x\,\mathrm{Cos.}\theta+x^2) =$$

$$= 2\log.2 + \log.\mathrm{Sin.}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin.}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{-1}\,,$$

$$\mathrm{arc.tang.}\frac{x-\mathrm{Cos.}\theta}{\mathrm{Sin.}\theta} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\log.\frac{\mathrm{Sin.}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{Sin.}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{x}{2}\right)}\,,$$

wo θ eine beliebige Größe bedeutet.

Diese Ergebnisse in Gleichung (91) eingesetzt, erhält man, bei Vernachlässigung der sich ergebenden constanten Theile, die man in der willkührlichen Constante der Integration enthaltend voraussetzen darf, und nach vollzogener Sonderung der reellen Theile von den imaginären, folgende zwei Gleichungen:

$$\int \frac{\text{Cos.}(p-m-1)x}{\text{Sin.}px}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2p}\left\{\log.\text{Sin.}\frac{x}{2} + (-1)^{m-1}\log.\text{Cos.}\frac{x}{2}\right\}$$

$$+ \frac{2}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\text{Cos.}\frac{(m+1)2k\pi}{2p}\log.\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right) + \text{C.} \quad (\beta)$$

$$\int \frac{\text{Sin.}(p-m-1)x}{\text{Sin.}px}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{2p}[x-(-1)^m x] - \frac{2x}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\text{Cos.}\frac{(m+1)2k\pi}{2p}$$

$$+ \frac{2}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\text{Sin.}\frac{(m+1)2k\pi}{2p}\log.\frac{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)}{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)} + \text{Const.}$$

Nun ist:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}\text{Cos.}\frac{(m+1)2k\pi}{2p} =$$

$$= -\frac{1+\text{Cos.}(m+1)\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\text{Sin.}(m+1)\pi\,\text{Cotang.}\frac{(m+1)\pi}{2p}.$$

Wenn daher $m+1 < 2p$ vorausgesetzt wird, so ist:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{(m+1)2k\pi}{2p} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(-1)^m,$$

und es ist:

$$\int \frac{\text{Sin.}(p-m-1)x}{\text{Sin.}px}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\text{Sin.}\frac{(m+1)2k\pi}{2p}\log.\frac{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)}{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)} + \text{Const.} \quad (\gamma)$$

Die Gleichung (91), die diesen beiden Gleichungen (β) und (γ) zu

Grunde liegt, besteht für alle ganzen und positiven Werthe von m und p, für die man 2p > m hat; daher besteht auch die Gleichung (β) für alle ganzen und positiven Werthe von m und p für die man:

$$m + 1 \gtreqless 2p ,$$

hat; und die Gleichung (γ) findet für die gleichen Werthe von m und p Statt, für die man:

$$m + 1 < 2p ,$$

hat. Wird diese Beschränkung vorausgesetzt und setzt man in die Gleichungen (β) und (γ):

$$p-m-1 = q , \quad \text{also} \quad m+1 = p-q ,$$

so geht die Gleichung (β) über in:

$$\int \frac{\text{Cos.}qx}{\text{Sin.}px} dx =$$

$$= \frac{2}{2p} \left\{ \text{log.Sin.}\frac{x}{2} + (-1)^{p-q} \text{log.Cos.}\frac{x}{2} \right\}$$

$$+ \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Cos.}\frac{p-q}{p} 2k \cdot \frac{\pi}{2} \text{log.Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p} - \frac{x}{2}\right) + \text{C.} \quad (\beta^1)$$

welche für alle ganzen Werthe von p und q besteht, für die man:

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad p+q \gtreqless o , \qquad (A)$$

hat. Eben so geht die Gleichung (γ) in folgende über:

$$\int \frac{\text{Sin.}qx}{\text{Sin.}px} dx =$$

$$= \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p-1} \text{Sin.}\frac{p-q}{p} 2k \cdot \frac{\pi}{2} \text{log.} \frac{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p} + \frac{x}{2}\right)}{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p} - \frac{x}{2}\right)} + \text{Const.} \qquad (\gamma^1)$$

welche für jene ganzen Werthe von p und q besteht, die den Bedingungen:

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad p+q > o ,$$

genügen.

Multiplicirt man ferner im Bruche $\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Cos.}px}$ Zähler und Nenner mit Sin.px, so hat man:

$$\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Cos.}px} = \frac{\text{Cos.}(p-q)x}{\text{Sin.}2px} - \frac{\text{Cos.}(p+q)x}{\text{Sin.}2px} ;$$

und wenn eben so im Bruche $\frac{\text{Cos.}qx}{\text{Cos.}px}$ Zähler und Nenner mit Sin.px multiplicirt werden, hat man:

$$\frac{\mathrm{Cos.}qx}{\mathrm{Cos.}px} = \frac{\mathrm{Sin.}(p-q)x}{\mathrm{Sin.}2px} + \frac{\mathrm{Sin.}(p+q)x}{\mathrm{Sin.}2px};$$

daher hat man, nach der Integrationsmethode der Zurückführens auf dem Wege des Zerlegens, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{Sin.}\,qx}{\mathrm{Cos.}px}\,dx &= \int\frac{\mathrm{Cos.}(p-q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx - \int\frac{\mathrm{Cos.}(p+q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx\,, \\ \int\frac{\mathrm{Cos.}qx}{\mathrm{Cos.}px}\,dx &= \int\frac{\mathrm{Sin.}(p-q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx + \int\frac{\mathrm{Sin.}(p+q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx\,, \end{aligned}\right\}\quad(\delta)$$

oder es sind die Werthe der Integralien zur Linken der Gleichheitszeichen von den durch die Gleichungen (β^1) und (γ^1) dargestellten Integralien abhängig.

Wird

$$p+q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad 3p-q \gtreqless o\,,$$

angenommen, so giebt (β^1):

$$\int\frac{\mathrm{Cos.}(p-q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4p}\left\{\log.\mathrm{Sin.}\frac{x}{2} + (-1)^{p+q}\log.\mathrm{Cos.}\frac{x}{2}\right\}$$

$$+ \frac{2}{4p}\sum_{k=1}^{k=2p-1}\mathrm{Cos.}\frac{p+q}{2p}2k\frac{\pi}{2}\log.\,\mathrm{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{8p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{8p}-\frac{x}{2}\right),$$

und wenn

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad 3p+q \gtreqless o\,,$$

vorausgesetzt wird, hat man, nach derselben Gleichung, folgende:

$$\int\frac{\mathrm{Cos.}(p+q)x}{\mathrm{Sin.}2px}\,dx =$$

$$= \frac{2}{4p}\left\{\log.\mathrm{Sin.}\frac{x}{2} + (-1)^{p-q}\log.\mathrm{Cos.}\frac{x}{2}\right\}$$

$$+ \frac{2}{4p}\sum_{k=1}^{k=2p-1}\mathrm{Cos.}\frac{p-q}{2p}2k.\frac{\pi}{2}\log.\mathrm{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{8p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{8p}-\frac{x}{2}\right).$$

Die in (A) ausgesprochenen Bedingungen, betreffend die Größen p und q, schließen die hier aufgestellten ein, namentlich dann, wenn p als positive Zahl festgestellt wird: es bestehen daher auch die beiden letzten Gleichungen beim Statthaben der Bedingungen in (A).

Subtrahirt man demnach die beiden letzten Gleichungen von einander, und bedenkt, daß p und q ganze Zahlen sind, wodurch:

$$(-1)^{p+q} = (-1)^{p-q} \;;$$

wird, so hat man mit Beachtung der ersten der Gleichungen (δ):

$$\int \frac{\text{Sin}.qx}{\text{Cos}.px} dx =$$

$$= \frac{2}{4p} \sum_{k=1}^{k=2p-1} \left\{ \text{Cos}. \frac{p+q}{2p} 2k \cdot \frac{\pi}{2} - \text{Cos}. \frac{p-q}{2p} 2k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \log. \text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{8p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{8p} - \frac{x}{2}\right)$$

oder:

$$\int \frac{\text{Sin}.qx}{\text{Cos}.px} dx =$$

$$= -\frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=2p-1} \text{Sin}. \frac{q}{p} k. \frac{\pi}{2} \;\text{Sin}.k. \frac{\pi}{2} \log.\text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{8p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{8p} - \frac{x}{2}\right) .$$

Wegen des Factors Sin. $k\frac{\pi}{2}$ verschwinden alle, den geraden Werthen von k entsprechende Glieder dieser Summe, daher hat man:

$$\int \frac{\text{Sin}.qx}{\text{Cos}.px} dx =$$

$$= +\frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k \text{Sin}. \frac{q}{p} (2k-1) \frac{\pi}{2} \log.\text{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p} - \frac{x}{2}\right) .$$

Ganz auf gleiche Weise findet man mit Zuziehung der Gleichung (γ^1), aus der zweiten der Gleichungen (δ), den Werth des Integrals $\int \frac{\text{Cos}.qx}{\text{Cos}.px} dx$.

Stellen wir diese Resultate zusammen, und lösen in den Gleichungen (β^1) und (γ^1) die Ausdrücke:

$$\text{Cos}. \frac{p-q}{2p} . 2k\frac{\pi}{2} , \qquad \text{Sin}. \frac{p-q}{p} . 2k\frac{\pi}{2} ,$$

auf, so erhalten wir, mit Beachtung des Umstandes, daß p und q ganze Zahlen sind, folgende Gleichungen:

$$\int \frac{\text{Cos}.qx}{\text{Sin}.px} dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\log.\text{Sin}. \frac{x}{2} + (-1)^{p-q} \log.\text{Cos}. \frac{x}{2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k \text{Cos}. \frac{q}{p} \cdot \frac{2k\pi}{2} \log.\text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{4p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{4p} - \frac{x}{2}\right) + \text{Const.} \qquad (140)$$

$$\int \frac{\text{Sin}.qx}{\text{Cos}.px} dx =$$

$$= +\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k \text{Sin}. \frac{q}{p} \frac{(2k-1)\pi}{2} \log.\text{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p} + \frac{x}{2}\right) \text{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p} - \frac{x}{2}\right) + \text{Const.} \qquad (141)$$

wo p positiv und ganz, q der einfachen Beschränkung, eine ganze Zahl zu sein, unterliegt, und wo man überdieß:

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad p+q \gtreqless 0\,, \tag{a}$$

haben muß.

Ferner hat man:

$$\int \frac{\text{Sin.}qx}{\text{Sin.}px}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k\,\text{Sin.}\frac{q}{p}\frac{2k\pi}{2}\,\log.\frac{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)}{\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)} + \text{Const.} \tag{142}$$

$$\int \frac{\text{Cos.}qx}{\text{Cos.}px}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k\,\text{Cos.}\frac{q}{p}\frac{(2k-1)\pi}{2}\,\log.\frac{\text{Sin.}\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)}{\text{Sin.}\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)} + \text{Const.} \tag{143}$$

wo, wie vorhin, p ganz und positiv, q nur an die Beschränkung, eine ganze Zahl zu sein, gebunden ist, und p sowohl als q folgenden Bedingungen genügen müssen.

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad p+q > 0\,, \tag{b}$$

82. Wir wollen hier einige Folgerungen aus den Gleichungen (140) und (141) der vorangehenden Nr. mittheilen.

Da diese Gleichungen für alle ganzen Werthe von p und q bestehen, die den in (a) ausgesprochenen Bedingungen genügen, und da die Annahme $q = -p$ diesen Bedingungen nicht zuwieder läuft; so gehen diese Gleichungen, für diese Abhängigkeit zwischen q und p, in folgende über:

$$\int \text{Cotang.}px\,dx = \frac{1}{p}\log.\text{Sin.}\frac{x}{2}\,\text{Cos.}\frac{x}{2}$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\log.\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right) + \text{C.}$$

$$\int \text{Tang.}px\,dx = \frac{-1}{p}\sum_{k=1}^{k=p}\log.\text{Sin.}\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right) + \text{C.}$$

Anderseits geben uns die Gleichungen (128) Nr. 76:

$$\int \text{Cotang.}px\,dx = \frac{1}{p}\log.\text{Sin.}px + \text{Const.}$$

$$\int \text{Tang.}px\,dx = -\frac{1}{p}\log.\text{Cos.}px + \text{Const.}$$

Wenn daher A und B zwei von x unabhängige Größen sind, so müssen folgende, in Bezug auf x, identische Gleichungen bestehen:

$$\log.\mathrm{Sin}.px = \log.A + \log.\mathrm{Sin}.\frac{x}{2}\mathrm{Cos}.\frac{x}{2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=p-1} \log.\mathrm{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin}.\left(\frac{2k\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right),$$

$$\log.\mathrm{Cos}.px = \log.B + \sum_{k=1}^{k=p} \log.\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2k-1)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right);$$

und wenn beiderseits, in beiden Gleichungen, die Logarithmen weggelassen werden, hat man:

$$\mathrm{Sin}.px = A\,\mathrm{Sin}.\frac{x}{2}\mathrm{Cos}.\frac{x}{2}$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{2\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{2\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{4\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{4\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2p-2)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2p-2)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right),$$

$$\mathrm{Cos}.px = B\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{5\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{5\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)$$

$$\times\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\times\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2p-1)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{Sin}.\left(\frac{(2p-1)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right).$$

Um die willführlichen, von x unabhängigen Größen A und B zu bestimmen, bedenke man, daß diese Gleichungen identisch nach x sind; läßt man daher, in beiden Gleichungen, x ohne Ende abnehmen, so ergeben sich, da alsdann:

$\mathrm{Sin}.px$ in px, $\mathrm{Sin}.\frac{x}{2}$ in $\frac{x}{2}$, $\mathrm{Cos}.\frac{x}{2}$ in 1 und $\mathrm{Cos}.px$ in 1,

übergehen, folgende Gleichungen zur Bestimmung von A und B:

$$p = A\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}.\frac{2\pi}{4p}\right)^2\left(\mathrm{Sin}.\frac{4\pi}{4p}\right)^2\left(\mathrm{Sin}.\frac{6\pi}{4p}\right)^2 \;.\;.\;.\;.\; \left(\mathrm{Sin}.\frac{(2p-2)\pi}{4p}\right)^2,$$

$$1 = B\left(\text{Sin.}\frac{\pi}{4p}\right)^2\left(\text{Sin.}\frac{3\pi}{4p}\right)^2\left(\text{Sin.}\frac{5\pi}{4p}\right)^2 \ldots \left(\text{Sin.}\frac{(2p-1)\pi}{4p}\right)^2;$$

woraus dann folgende Gleichungen gezogen werden:

$$\text{Sin.}px = p\,\text{Sin.}x.\frac{\text{Sin.}\left(\frac{2\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right).\text{Sin.}\left(\frac{2\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{2\pi}{4p}\right)^2}$$
$$\times\frac{\text{Sin.}\left(\frac{4\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right).\text{Sin.}\left(\frac{4\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{4\pi}{4p}\right)^2}$$
$$\times\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times\frac{\text{Sin.}\left(\frac{(2p-2)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right).\text{Sin.}\left(\frac{(2p-2)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{(2p-2)\pi}{4p}\right)^2}, \qquad \text{(I)}$$

$$\text{Cos.}px = \frac{\text{Sin.}\left(\frac{\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{\pi}{4p}\right)^2}$$
$$\times\frac{\text{Sin.}\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{3\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{3\pi}{4p}\right)^2}$$
$$\times\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times\frac{\text{Sin.}\left(\frac{(2p-1)\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{(2p-1)\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\frac{(2p-1)\pi}{4p}\right)^2}, \qquad \text{(II)}$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}px = \\ = p\text{Sin.}x.\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{2\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{2\pi}{2p}}.\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{4\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{4\pi}{2p}}\ldots\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{(2p-2)\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{(2p-2)\pi}{2p}}, \\ \text{Cos.}px = \\ = \frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{\pi}{2p}}.\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{3\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{3\pi}{2p}}\ldots\frac{\text{Cos.}x-\text{Cos.}\frac{(2p-1)\pi}{2p}}{1-\text{Cos.}\frac{(2p-1)\pi}{2p}}.\end{array}\right\}\text{(III)}$$

Aus den Gleichungen (I) und (II) lassen sich, durch die folgende Betrachtung, noch zwei Gleichungen ableiten.

Da die Größe p einzig an die Bedingung, ganz und positiv zu sein, gebunden ist, so wird man dieselbe als im Zustande des unendlich groß Werdens annehmen dürfen; und damit irgend ein Resultat erzielt werde, werden wir gleichzeitig die Größe x im Zustande des unendlichen Abnehmens sich befindend voraussetzen.

Dieses vorausgesetzt, kann man, wenn unter z irgend eine endliche Größe gedacht wird, das Produkt:

$$px = z ,$$

setzen, und da man nunmehr folgende Umsetzungen:

$$\text{Sin.}px \text{ in Sin.}z\,, \quad p\,\text{Sin.}x \text{ in } pz\,, \quad \text{Cos.}px \text{ in Cos.}z\,,$$

$$\frac{\text{Sin.}\left(\frac{\lambda}{p}+\frac{x}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{\lambda}{p}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\text{Sin.}\,\frac{\lambda}{p}\right)^2} \text{ in } 1-\frac{z^2}{4\lambda^2}\,,$$

machen darf, so gehen die Gleichungen (I) und (II) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin.}z &= z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\ \ldots\ldots\ldots \\ \text{Cos.}z &= \left(1-4\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-4\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-4\frac{z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-4\frac{z^2}{49\pi^2}\right)\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ \text{(IV)}$$

Setzt man endlich in der ersten dieser zwei Gleichungen $z=\frac{\pi}{2}$ voraus, so findet man:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots \qquad \text{(V)}$$

Alle hier gefundenen Gleichungen sind in der trigonometrischen Analysis hinlänglich bekannt; bei der Mittheilung derselben beabsichtigten wir einzig, die Richtigkeit der in der vorhergehenden Nr. aufgestellten Gleichungen zu erproben.

83. Wenn in den Gleichungen Nr. 81 p und q gebrochene Zahlenwerthe haben, kann man sich auch noch der Gleichungen (140) bis (143) dieser Nr. zur Ausmittelung der dort behandelten Integralfunctionen bedienen, und zwar auf folgendem Wege:

Wenn p und q gebrochene rationale Zahlen sind, so kann man dieselben jedesmal durch Brüche mit gleich großen Nennern darstellen; dieses vorausgesetzt, sei z. B. das Integrale:

$$u = \int \frac{\operatorname{Cos.} \frac{a}{c} x}{\operatorname{Cos.} \frac{b}{c} x} dx,$$

zur Ausmittelung vorgelegt, wo a, b, c ganze Zahlen repräsentiren. Wird

$$x' = \frac{x}{c}$$

gesetzt, so hat man:

$$u = c \int \frac{\operatorname{Cos.} ax'}{\operatorname{Cos.} bx'} dx';$$

finden nun die Bedingungen in (b) Nr. 81 Statt, d. h. hat man:

$$b - a \geqq 1 \quad \text{und} \quad b + a > o,$$

dann giebt die Gleichung (143) dieser Nr. den unter der letzten Form dargestellten Werth von u, und wenn nachher für x' deren Werth $\frac{x}{c}$ zurückgesetzt wird, erhält man auch den Werth des vorgelegten Integralausdruckes.

Sind die Coefficienten p und q mit der Einheit nicht meßbar, d. h. sind sie irrationaler oder incommensurabeler Natur, dann sind die Integralien im Allgemeinen nur annäherungsweise bestimmbar: man stellt diese incommensurabeln Größen angenähert durch gebrochene, mit gleichen Nennern begabte Zahlen dar, und behandelt sie, wie so eben angedeutet worden ist.

84. Wie aus den Bedingungen (a) und (b) Nr. 81 erhellet, sind die an gleichem Orte behandelten Integralien jedesmal angebbar, wenn p numerisch nicht kleiner als q ist. Findet nun das Gegentheil Statt, d. h. ist q numerisch größer als p, so werden die Bedingungen in (a) und (b) nicht realisirt, und die Gleichungen (140) bis (143) finden auch nicht mehr Statt. Wir wollen daher, um den Gegenstand ganz zu erschöpfen, die Mittheilung einer Reduction dieses Falles auf den Erstern hier nachfolgen lassen. Wenn α und β zwei beliebige Winkel oder Bogen vorstellen, und wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so hat man, wie bekannt, folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\operatorname{Sin.}(n\beta + \alpha - \frac{1}{2}\beta) - \operatorname{Sin.}(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\beta} =$$

$$= \operatorname{Cos.}\alpha + \operatorname{Cos.}(\alpha+\beta) + \operatorname{Cos.}(\alpha+2\beta) + \operatorname{Cos.}(\alpha+3\beta) + \ldots + \operatorname{Cos.}[\alpha+(n-1)\beta]$$

$$\frac{-\text{Cos.}(n\beta+\alpha-\frac{1}{2}\beta)+\text{Cos.}(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}\beta}=$$

$$=\text{Sin.}\alpha+\text{Sin.}(\alpha+\beta)+\text{Sin.}(\alpha+2\beta)+\text{Sin.}(\alpha+3\beta)+\ldots+\text{Sin.}[\alpha+(n-1)\beta].$$

Wird in diesen Gleichungen:

$$\alpha=(p+q')x\,,\quad \beta=2px\,,$$

angenommen, so findet man sehr leicht:

$$\frac{\text{Sin.}(2np+q')x}{\text{Sin.}px}=\frac{\text{Sin.}q'x}{\text{Sin.}px}+$$

$$+2\left\{\text{Cos.}(q'+p)x+\text{Cos.}(q'+3p)x+\ldots\ldots+\text{Cos.}[q'+(2n-1)p]x\right\}\,,$$

$$\frac{\text{Cos.}(2np+q')x}{\text{Sin.}px}=\frac{\text{Cos.}q'x}{\text{Sin.}px}-$$

$$-2\left\{\text{Sin.}(q'+p)x+\text{Sin.}(q'+3p)x+\ldots\ldots+\text{Sin.}[q'+(2n-1)p]x\right\}.$$

Stellt nun q eine numerisch größere Zahl als p vor, so ist es jedesmal möglich, eine ganze positive Zahl n und eine ganze (positive oder negative) Zahl q' zu finden, die der Gleichung:

$$q=2np+q' \qquad \text{(c)}$$

ein Genüge thun, und zwar kann man, wenn man q durch 2p zu theilen versucht, den Rest q' jedesmal so wählen, daß der numerische Werth desselben kleiner als der von p ausfällt. Dieses vorausgesetzt, geben die beiden obigen Gleichungen:

$$\int\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Sin.}px}\,dx=$$

$$=2\left\{\frac{\text{Sin.}(q'+p)x}{q'+p}+\frac{\text{Sin.}(q'+3p)x}{q'+3p}+\ldots+\frac{\text{Sin.}[q'+(2n-1)p]x}{q'+(2n-1)p}\right\}+$$

$$+\int\frac{\text{Sin.}q'x}{\text{Sin.}px}\,dx\,, \qquad (144)$$

$$\int\frac{\text{Cos.}qx}{\text{Sin.}px}\,dx=$$

$$=2\left\{\frac{\text{Cos.}(q'+p)x}{q'+p}+\frac{\text{Cos.}(q'+3p)x}{q'+3p}+\ldots+\frac{\text{Cos.}[q'+(2n-1)p]x}{q'+(2n-1)p}\right\}+$$

$$+\int\frac{\text{Cos.}q'x}{\text{Sin.}px}\,dx\,, \qquad (145)$$

welche die verlangten Reductionsgleichungen sind, wo q numerisch größer, q' numerisch kleiner als p ist, und wo q' sowohl als n aus der obigen Gleichung (c) zu bestimmen sind. Zieht man noch die beiden Gleichungen (δ) Nr. 81 in Betrachtung, so erscheinen die zu Anfang dieser Nr. vorgelegten Integralausdrücke für alle reelle Werthe

von p und q (wenn man noch den Inhalt der vorhergehenden Nr. mit berücksichtiget) bestimmbar, und die entsprechenden Integralfunctionen derselben stellen sich in algebraischen und logarithmischen Functionen der Sinusse und Cosinusse der Variabeln dar.

85. Der anfangs Nr. 81 betretene Weg führt auch zur Kenntniß der beiden folgenden Integralausdrücke:

$$\int\frac{dx}{a+bCos.x+cCos.2x}\,,\qquad \int\frac{Cos.xdx}{a+bCos.x+cCos.2x}\,.$$

Wir legen die Gleichung (19) Nr. 44 und die Gleichung (49) Nr. 51 zu Grunde; wird in diesen Gleichungen, nach der Ableitungsmethode §. II,

$$x \text{ in } Cos.x+\sqrt{-1}\,Sin.x\,,$$

umgesetzt, so geht:

$$\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} \text{ in } -\frac{(\alpha-\gamma)Sin.xdx}{X}+\sqrt{-1}\,\frac{\beta+(\alpha+\gamma)Cos.x}{X}dx$$

und

$$\frac{xdx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} \text{ in } -\frac{\beta Sin.x+\alpha Sin.2x}{X}dx+\sqrt{-1}\,\frac{\gamma+\beta Cos.x+\alpha Cos.2x}{X}dx$$

über, wo dem mit $\sqrt{-1}$ behafteten Theile der letzten Zeile auch folgende Form gegeben werden kann:

$$\frac{1}{2\gamma}dx+\frac{1}{2\gamma}\cdot\frac{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}{X}dx-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\cdot\frac{Cos.xdx}{X}\,,$$

wenn der Kürze wegen:

$$X=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta(\alpha+\gamma)Cos.x+2\alpha\gamma Cos.2x\,,$$

gesetzt wird.

Wird auch in den Ausdrücken zur Rechten der Gleichheitszeichen der citirten Gleichungen (19) und (49) $Cos.x+\sqrt{-1}Sin.x$ statt x gesetzt, so geht in der Gleichung (19) der mit $\sqrt{-1}$ behaftete Theil, nach den Gleichungen (α) Nr. 81, über in:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,arc.tang.\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,Sin.x}{\alpha+\gamma+\beta Cos.x}\,,$$

und in der Gleichung (49) geht der analoge Theil, aus gleichem Grunde, über in:

$$\frac{1}{2\gamma}\,arc.tang.\,\frac{\beta Sin.x+\gamma Sin.2x}{\alpha+\beta Cos.x+\gamma Cos.2x}$$

$$-\frac{\beta}{2\gamma}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,arc.tang.\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,Sin.x}{\alpha+\gamma+\beta Cos.x}\,,$$

und wegen

$$\text{arc.tang.}\,\frac{\beta\text{Sin.}x+\gamma\text{Sin.}2x}{\alpha+\beta\text{Cos.}x+\gamma\text{Cos.}2x}=x-\text{arc.tang.}\,\frac{(\alpha-\gamma)\text{Sin.}x}{\beta+(\alpha+\gamma)\text{Cos.}x},$$

hat man, wenn diese mit $\sqrt{-1}$ behafteten Ausdrücke, in jeder dieser zwei Gleichungen, einander gleich gesetzt werden, folgende Gleichungen:

$$(\alpha+\gamma)\int\frac{\text{Cos.}x\,dx}{X}+\beta\int\frac{dx}{X}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,\text{arc.tang.}\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\text{Sin.}x}{\alpha+\gamma+\beta\text{Cos.}x},$$

$$-2\alpha\beta\int\frac{\text{Cos.}x\,dx}{X}+(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)\int\frac{dx}{X}=\frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,\text{arc.tg.}\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\text{Sin.}x}{\alpha+\gamma+\beta\text{Cos.}x}$$
$$-\text{arc.tang.}\,\frac{(\alpha-\gamma)\text{Sin.}x}{\beta+(\alpha+\gamma)\text{Cos.}x},$$

aus welchen, mit Beachtung des obigen Werthes von X, folgende Gleichungen gewonnen werden:

$$\int\frac{dx}{a+b\text{Cos.}x+c\text{Cos.}2x}=$$
$$=\frac{\beta}{[\beta^2-(\alpha+\gamma)^2]\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,.\,\text{arc.tang.}\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\text{Sin.}x}{\alpha+\gamma+\beta\text{Cos.}x}$$
$$-\frac{\alpha+\gamma}{[\beta^2-(\alpha+\gamma)^2](\alpha-\gamma)}\,.\,\text{arc.tang.}\,\frac{(\alpha-\gamma)\text{Sin.}x}{\beta+(\alpha+\gamma)\text{Cos.}x}+\text{Const.},$$

$$\int\frac{\text{Cos.}x\,dx}{a+b\text{Cos.}x+c\text{Cos.}2x}=$$
$$=-\frac{\alpha+\gamma}{[\beta^2-(\alpha+\gamma)^2]\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,.\,\text{arc.tang.}\,\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\text{Sin.}x}{\alpha+\gamma+\beta\text{Cos.}x}$$
$$+\frac{\beta}{[\beta^2-(\alpha+\gamma)^2](\alpha-\gamma)}\,.\,\text{arc.tang.}\,\frac{(\alpha-\gamma)\text{Sin.}x}{\beta+(\alpha+\gamma)\text{Cos.}x}+\text{Const.},$$

wo α, β, γ aus den folgenden Gleichungen:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a,$$
$$2\beta(\alpha+\gamma)=b,$$
$$2\alpha\gamma=c,$$

zu bestimmen und in die so eben aufgestellten Gleichungen einzusetzen sind.

Addirt man diese drei Gleichungen, so findet man:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=a+b+c\,.$$

Wird von der Summe der ersten und letzten, die mittlere dieser Gleichungen abgezogen, so hat man:

$$(\alpha-\beta+\gamma)^2=a-b+c\,,$$

woraus, zur Realität der Größe α, β, γ, das Positivsein der Ausdrücke:

$$a+b+c\,,\qquad a-b+c\,,$$

als erste, unerläßliche Bedingung gefolgert wird.

Trifft dieses ein, so setze man:

$$a+b+c=m^2\,,\qquad a-b+c=n^2\,,$$

dann erhält man,

$$\alpha+\gamma=\frac{m+n}{2}\,,\qquad \beta=\frac{m-n}{2}\,,$$

und die obigen Gleichungen gehen über in:

$$\int\frac{dx}{a+b\mathrm{Cos}.x+c\mathrm{Cos}.2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\mathrm{Sin}.x}{m+n+(m-n)\mathrm{Cos}.x}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{\alpha-\gamma}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{2(\alpha-\gamma)\mathrm{Sin}.x}{m-n+(m+n)\mathrm{Cos}.x}+\mathrm{Const.}\;;\qquad(146)$$

$$\int\frac{\mathrm{Cos}.xdx}{a+b\mathrm{Cos}.x+c\mathrm{Cos}.2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\,.\,\mathrm{Sin}.x}{m+n+(m-n)\mathrm{Cos}.x}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{\alpha-\gamma}\,\mathrm{arc.tang.}\,\frac{2(\alpha-\gamma)\mathrm{Sin}.x}{m-n+(m+n)\mathrm{Cos}.x}+\mathrm{Const.}\;;\qquad(147)$$

da man ferner:

$$\beta^2-4\alpha\gamma=\tfrac{1}{4}(m-n)^2-2c\,,$$
$$(\alpha-\gamma)^2=\tfrac{1}{4}(m+n)^2-2c\,,$$

hat, so wird man mit Hülfe dieser Gleichungen die vorgelegten zwei Integralien unter reellen Formen darstellen können:

a) wenn die Ausdrücke links der Gleichheitszeichen, in den letzten zwei Gleichungen, als positive Größen auftreten,

b) wenn diese Größen ohne Ende abnehmen, denn bedenkt man die Grenzgleichung:

$$\mathrm{Lim}:\frac{1}{\omega}\,\mathrm{arc.tang.}\omega z=z\,,$$

wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Abnehmen von ω Bezug hat, so wird man sehr leicht aus der obigen Gleichung, die Werthe der vorgelegten Integralien, in reellen Formen darstellen können.

c) Nehmen endlich diese Größen negative Werthe an, welches nur

für positive Werthe von c denkbar ist, so kann man, mit Zuziehung der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\text{arc.tang.}z\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\log.\frac{1+z}{1-z}\,,$$

noch immer reelle Ausdrücke, als Werthe der vorgelegten Integralien, aus diesen Gleichungen ziehen.

Man wird also mit Hülfe der Gleichungen (146) und (147) bei der Annahme, daß m und n reelle Größen sind, die Werthe der vorgelegten Integralien jedesmal unter reellen Formen dargestellt erhalten.

Wie sich zu benehmen sei, wenn m und n imaginäre Werthe haben, wollen wir hier unerörtert lassen. In der folgenden Nr., wo wir nach einer andern Methode die fraglichen Integralien zu bestimmen suchen werden, wird gerade dieser Fall reelle Formen für die vorgelegten Integralien darbieten.

Wir schließen diese Nr. mit der Bemerkung, daß man die Größen a und b in den zwei vorgelegten Integralausdrücken immer als positiv voraussetzen darf; denn, was die Größe a betrifft, reicht, falls a negativ wäre, ein einfaches Umsetzen von x in $-x$ hin, dieselbe positiv zu machen; und die Größe b betreffend, setze man x in $\pi+x$ um, so geht auch $-b$ in $+b$ über.

86. Man hat die Gleichheit:

$$a+b\,\text{Cos.}x + c\,\text{Cos.}2x = 2c\,\text{Cos.}x^2 + b\,\text{Cos.}x + a-c\,,$$

also hat man auch, wenn der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in Factoren aufgelöst wird,

$$a+b\,\text{Cos.}x+c\,\text{Cos.}2x = \frac{1}{8c}(b+\Delta+4c\,\text{Cos.}x)(b-\Delta+4c\,\text{Cos.}x)\,,$$

wo der Kürze wegen,

$$\Delta = \sqrt{b^2-8c(a-c)}\,,$$

gesetzt worden ist.

Zerlegt man nun, mit Zuziehung dieser Gleichung, die Brüche:

$$\frac{1}{a+b\,\text{Cos.}x+c\,\text{Cos.}2x}\,,\qquad \frac{\text{Cos.}x}{a+b\,\text{Cos.}x+c\,\text{Cos.}2x}\,,$$

in Theilbrüche, so wird man, nach §. V Nr. 62, auf folgende zwei Integralgleichungen geführt:

$$\int\frac{dx}{a+b\,\text{Cos.}x+c\,\text{Cos.}2x} =$$

$$= -\frac{4c}{\Delta}\int\frac{dx}{b+\Delta+4c\,\text{Cos.}x} + \frac{4c}{\Delta}\int\frac{dx}{b-\Delta+4c\,\text{Cos.}x}\,, \qquad (148)$$

$$\int \frac{\text{Cos.}x\,dx}{a+b\,\text{Cos.}x+c\,\text{Cos.}2x} =$$

$$= \frac{b+\Delta}{\Delta}\int \frac{dx}{b+\Delta+4c\,\text{Cos.}x} - \frac{b-\Delta}{\Delta}\int \frac{dx}{b-\Delta+4c\,\text{Cos.}x} \,. \tag{149}$$

Da in allen jenen Fällen, in denen Δ einen reellen Werth annimmt, die Integralien rechts der Gleichheitszeichen nach Nr. 78 und mithin auch die vorgelegten Integralien durch reelle Formen darstellbar sind, so wird es von Nutzen sein, jene Fälle herauszuheben, die für Δ einen reellen Werth darbieten.

Zuerst ist diese Größe Δ reell, wenn c negativ ist; denn bedenkt man die am Schlusse der vorhergehenden Nr. gemachte Bemerkung, so kann man a und b jedesmal als positive Größen voraussetzen, woraus sofort die Richtigkeit unserer Behauptung einleuchtet.

Ferner ist diese Größe reell, wenn c positiv ist und zwar:

a) Wenn man

$$c \gtreqless a$$

hat, welches ebenfalls beim bloßen Anblicke des Werthes von Δ einleuchtet.

b) Wenn das Verhalten von c zu a ein beliebiges ist, jedoch die in der vorhergehenden Nr. durch n bezeichnete Größe einen imaginären Werth annimmt.

In der That, da a und b positiv vorausgesetzt werden können, so kann n nur dann einen imaginären Werth annehmen, wenn man:

$$b > a + c \,,$$

hat Besteht nun diese Ungleichheit, also auch diese:

$$b^2 > (a+c)^2 \,,$$

so hat man:

$$b^2 - 8c(a-c) > (a+c)^2 - 8c(a-c)$$

oder:

$$\Delta^2 > a^2 - 6ac + 9c^2$$

oder:

$$\Delta^2 > (a-3c)^2 \,;$$

also Δ^2 ist größer als die positive Größe $(a-3c)^2$, daher ist Δ reell, w. z. b. w.

Wir verweilen nicht bei der Untersuchung über die Beschaffenheit der Größe Δ, wenn n reell ausfällt; denn, da alsdann um so mehr die Größe m als reell angenommen werden darf, so genügt ein einfaches Hinweisen auf das in der vorangehenden Nr. Mitgetheilte, um zu ersehen, daß es gerade dieser Fall ist, in dem die dort ge-

funden Resultate die fraglichen Integralien unter reellen Formen darstellen.

Die Ergebnisse betreffend die beiden Integralien:

$$\int \frac{dx}{a+b\,\mathrm{Cos}.x+c\,\mathrm{Cos}.2x}\,,\qquad \int \frac{\mathrm{Cos}.x\,dx}{a+b\,\mathrm{Cos}.x+c\,\mathrm{Cos}.2x}\,,$$

zusammen gefaßt, hat man Folgendes:

I. Wenn a und b positiv vorausgesetzt werden, und es ist:

a) die Größe c negativ,

b) die Größe c positiv und an die Bedingung

$$a \gtreqless c$$

gebunden,

c) die Größe c positiv und an die Bedingung

$$a + c < b$$

gebunden,

so wird man diese Integralien nach den Gleichungen (148) und (149) unter reellen Formen darstellen können.

II. Wenn außer a und b auch c positiv vorausgesetzt wird, und man hat:

$$a + c > b\,,$$

so wird man die vorgelegten Integralien aus den Gleichungen (146) und (147) der vorhergehenden Nr., mit Zuziehung des dort angeführten Falles c), ebenfalls unter reellen Formen dargestellt erhalten.

III. Wenn a, b, c positive Größen sind und man hat:

$$a + c = b\,,$$

so wird man diese Integralien nach beiden Methoden durch reelle Formenwerthe ausgedrückt erhalten.

87. Von den in den beiden letzten Nrn. behandelten Integralien kann man sehr leicht das folgende Integrale:

$$\int \frac{dx}{\alpha'+\beta' x^2+\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\,,$$

wenn nur α positiv ist, abhängig machen.

a) Wenn außer α auch β positiv vorausgesetzt wird, setze man:

$$\beta x^2 = \alpha\,\mathrm{tang}.y^2\,,$$

so geht dx in $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{dy}{\mathrm{Cos}.y^2}$ über, und man hat:

$$\int\frac{dx}{\alpha'+\beta'x^2+\sqrt{\alpha+\beta x^2}}=2\sqrt{\alpha\beta}\int\frac{dx}{a+b\,Cos.y+c\,Cos.2y},$$

wo:

$$a=\alpha'\beta+\beta'\alpha\,,\quad b=2\beta\sqrt{\alpha}\,,\quad c=\alpha'\beta-\beta'\alpha$$

gesetzt worden ist.

b) Wenn β negativ ist, setze man:

$$\beta x^2=\alpha\,Sin.y^2\,,$$

wodurch erhalten wird:

$$\int\frac{dx}{\alpha'+\beta'x^2+\sqrt{\alpha-\beta x^2}}=2\sqrt{\alpha\beta}\int\frac{Cos.y\,dy}{a+b\,Cos.y+c\,Cos.2y},$$

wo der Kürze wegen:

$$a=2\alpha'\beta+\beta'\alpha\,,\quad b=2\beta\sqrt{\alpha}\,,\quad c=-\beta'\alpha\,,$$

angenommen ward.

88. Fahren wir in der Mittheilung von Anwendungen der verschiedenen Integrationsmethoden fort und wenden uns zunächst an die Fundamentalgleichung II. Nr. 38 oder an die aus derselben abgeleitete Gleichung (9) Nr. 40, so erhalten wir, wenn in dieser Gleichung (9) x in $(m+n\sqrt{-1})x$, also dx in $(m+n\sqrt{-1})dx$ umgesetzt wird, die Gleichung:

$$\int e^{mx}e^{nx\sqrt{-1}}(m+n\sqrt{-1})\,dx=e^{mx}e^{nx\sqrt{-1}}$$

oder:

$$\int e^{mx}(m\,Cos.nx-n\,Sin.nx)\,dx+\sqrt{-1}\int e^{mx}(n\,Cos.nx+m\,Sin.nx)\,dx=$$
$$=e^{mx}(Cos.nx+\sqrt{-1}\,Sin.nx)\;;$$

durch Gleichsetzung der reellen Theile erhält man:

$$m\int e^{mx}Cos.nx\,dx-n\int e^{mx}Sin.nx\,dx=e^{mx}Cos.nx\,,$$

daher hat man auch:

$$n\int e^{mx}Cos.nx\,dx+m\int e^{mx}Sin.nx\,dx=e^{mx}Sin.nx\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{mx}Cos.nx\,dx&=\frac{m\,Cos.nx+n\,Sin.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx}+Const\\ \int e^{mx}Sin.nx\,dx&=\frac{m\,Sin.nx-n\,Cos.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx}+Const.\end{aligned}\right\}\quad(150)$$

wo m und n beliebige constante Größen vorstellen.

Wird ferner der Kürze wegen:

$$M_1=\frac{m\,Cos.nx+n\,Sin.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx}\,,$$

$$M_2 = \frac{m\text{Sin}.nx - n\text{Cos}.nx}{m^2+n^2} . e^{mx} ,$$

gesetzt, und differenzirt man die Gleichungen (150) p mal nach einander in Bezug auf m, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \int x^p e^{mx}\text{Cos}.nx\,dx &= \frac{d^p M_1}{dm^p} + \text{Const.} \\ \int x^p e^{mx}\text{Sin}.nx\,dx &= \frac{d^p M_2}{dm^p} + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad (151)$$

Die Werthe dieser zwei Integralausdrücke kann man auch, wie in der folgenden Nr. gezeigt werden soll, durch Recursionsgleichungen bestimmen: es stellen demnach die zwei letzten Gleichungen die Auflösungen dieser Recursionsgleichungen oder der Gleichungen (152) und (153), (154) und (155) der folgenden Nr. dar.

89. Wir gelangen am schnellsten durch die sogenannte theilweise Integration (Anmerkung zu Nr. 56) zu diesen Recursionsgleichungen. Setzt man in die Gleichung (4) Nr. 38:

$$d.\,f(x) = e^{mx}\text{Cos}.nx\,dx \quad \text{und} \quad F(x) = x^p ,$$

so giebt die erste der Gleichungen (150),

$$f(x) = \frac{m\text{Cos}.nx + n\text{Sin}.nx}{m^2+n^2} \cdot e^{mx} ,$$

und wegen

$$d.\,F(x) = px^{p-1}dx ,$$

hat man folgende Recursionsgleichung:

$$(m^2+n^2)u_p + pmu_{p-1} + pnv_{p-1} = x^p e^{mx}(m\text{Cos}.nx + n\text{Sin}.nx), \quad (152)$$

wo der Kürze wegen,

$$\left.\begin{aligned} u_p &= \int x^p e^{mx}\text{Cos}.nx\,dx , \\ v_p &= \int x^p e^{mx}\text{Sin}.nx\,dx , \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

gesetzt worden ist.

Wird ferner in derselben Gleichung (4) folgende Annahme getroffen:

$$d.\,f(x) = e^{mx}\text{Sin}.nx\,dx \quad \text{und} \quad F(x) = x^p ,$$

so erhält man, mit Beachtung der zweiten der Gleichungen (150), folgende Recursionsgleichung:

$$(m^2+n^2)v_p + pmv_{p-1} - pnu_{p-1} = x^p e^{mx}(m\text{Sin}.nx - n\text{Cos}.nx) . \quad (153)$$

Läßt man in der vorhergehenden Recursionsgleichung p in p + 1 übergehen, dann hat man auch:

$$\int\frac{\mathrm{Cos}.x\,dx}{a+b\,\mathrm{Cos}.x+c\,\mathrm{Cos}.2x}=$$

$$=\frac{b+\Delta}{\Delta}\int\frac{dx}{b+\Delta+4c\,\mathrm{Cos}.x}-\frac{b-\Delta}{\Delta}\int\frac{dx}{b-\Delta+4c\,\mathrm{Cos}.x}\,. \quad (1$$

Da in allen jenen Fällen, in denen Δ einen reellen Werth annimmt, die Integralien rechts der Gleichheitszeichen nach Nr. und mithin auch die vorgelegten Integralien durch reelle Formen darstellbar sind, so wird es von Nutzen sein, jene Fälle herauszuheben, die für Δ einen reellen Werth darbieten.

Zuerst ist diese Größe Δ reell, wenn c negativ ist; denn bedenkt man die am Schlusse der vorhergehenden Nr. gemachte Bemerkung, so kann man a und b jedesmal als positive Größen voraussetzen, woraus sofort die Richtigkeit unserer Behauptung einleuchtet.

Ferner ist diese Größe reell, wenn c positiv ist und zwar:

a) Wenn man

$$c \gtreqless a$$

hat, welches ebenfalls beim bloßen Anblicke des Werthes von Δ einleuchtet.

b) Wenn das Verhalten von c zu a ein beliebiges ist, jedoch die in der vorhergehenden Nr. durch n bezeichnete Größe einen imaginären Werth annimmt.

In der That, da a und b positiv vorausgesetzt werden können, so kann n nur dann einen imaginären Werth annehmen, wenn man:

$$b > a + c\,,$$

hat Besteht nun diese Ungleichheit, also auch diese:

$$b^2 > (a+c)^2\,,$$

so hat man:

$$b^2 - 8c(a-c) > (a+c)^2-8c(a-c)$$

oder:

$$\Delta^2 > a^2 - 6ac + 9c^2$$

oder:

$$\Delta^2 > (a-3c)^2\,;$$

also Δ^2 ist größer als die positive Größe $(a-3c)^2$, daher ist Δ reell, w. z. b. w.

Wir verweilen nicht bei der Untersuchung über die Beschaffenheit der Größe Δ, wenn n reell ausfällt; denn, da alsdann um so mehr die Größe m als reell angenommen werden darf, so genügt ein einfaches Hinweisen auf das in der vorangehenden Nr. Mitgetheilte, um zu ersehen, daß es gerade dieser Fall ist, in dem die dort ge-

fundenen Resultate die fraglichen Integralien unter reellen Formen darstellen.

Die Ergebnisse betreffend die beiden Integralien:

$$\int\frac{dx}{a+b\,\mathrm{Cos}.x+c\,\mathrm{Cos}.2x}\,,\quad \int\frac{\mathrm{Cos}.x\,dx}{a+b\,\mathrm{Cos}.x+c\,\mathrm{Cos}.2x}\,,$$

zusammen gefaßt, hat man Folgendes:

I. Wenn a und b positiv vorausgesetzt werden, und es ist:

a) die Größe c negativ,

b) die Größe c positiv und an die Bedingung

$$a \gtreqless c$$

gebunden,

c) die Größe c positiv und an die Bedingung

$$a + c < b$$

gebunden,

so wird man diese Integralien nach den Gleichungen (148) und (149) unter reellen Formen darstellen können.

II. Wenn außer a und b auch c positiv vorausgesetzt wird, und man hat:

$$a + c > b\,,$$

so wird man die vorgelegten Integralien aus den Gleichungen (146) und (147) der vorhergehenden Nr., mit Zuziehung des dort angeführten Falles c), ebenfalls unter reellen Formen dargestellt erhalten.

III. Wenn a, b, c positive Größen sind und man hat:

$$a + c = b\,,$$

so wird man diese Integralien nach beiden Methoden durch reelle Formenwerthe ausgedrückt erhalten.

87. Von den in den beiden letzten Nrn. behandelten Integralien kann man sehr leicht das folgende Integrale:

$$\int\frac{dx}{\alpha'+\beta'x^2+\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\,,$$

wenn nur α positiv ist, abhängig machen.

a) Wenn außer α auch β positiv vorausgesetzt wird, setze man:

$$\beta x^2 = \alpha\,\mathrm{tang}.y^2\,,$$

so geht dx in $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{dy}{\mathrm{Cos}.y^2}$ über, und man hat:

$$\int\frac{dx}{\alpha'+\beta'x^2+\sqrt{\alpha+\beta x^2}} = 2\sqrt{\alpha\beta}\int\frac{dx}{a+b\,Cos.y+c\,Cos.2y},$$

wo:

$$a = \alpha'\beta+\beta'\alpha\,, \quad b = 2\beta\sqrt{\alpha}\,, \quad c = \alpha'\beta-\beta'\alpha$$

gesetzt worden ist.

b) Wenn β negativ ist, setze man:

$$\beta x^2 = \alpha\,Sin.y^2\,,$$

wodurch erhalten wird:

$$\int\frac{dx}{\alpha'+\beta'x^2+\sqrt{\alpha-\beta x^2}} = 2\sqrt{\alpha\beta}\int\frac{Cos.ydy}{a+b\,Cos.y+c\,Cos.2y},$$

wo der Kürze wegen:

$$a = 2\alpha'\beta+\beta'\alpha\,, \quad b = 2\beta\sqrt{\alpha}\,, \quad c = -\beta'\alpha\,,$$

angenommen ward.

88. Fahren wir in der Mittheilung von Anwendungen der verschiedenen Integrationsmethoden fort und wenden uns zunächst an die Fundamentalgleichung II. Nr. 38 oder an die aus derselben abgeleitete Gleichung (9) Nr. 40, so erhalten wir, wenn in dieser Gleichung (9) x in $(m+n\sqrt{-1})x$, also dx in $(m+n\sqrt{-1})dx$ umgesetzt wird, die Gleichung:

$$\int e^{mx}e^{nx\sqrt{-1}}(m+n\sqrt{-1})\,dx = e^{mx}e^{nx\sqrt{-1}}$$

oder:

$$\int e^{mx}(m\,Cos.nx-n\,Sin.nx)\,dx+\sqrt{-1}\int e^{mx}(n\,Cos.nx+m\,Sin.nx)\,dx =$$
$$= e^{mx}(Cos.nx+\sqrt{-1}\,Sin.nx)\,;$$

durch Gleichsetzung der reellen Theile erhält man:

$$m\int e^{mx}Cos.nx\,dx-n\int e^{mx}Sin.nx\,dx = e^{mx}Cos.nx\,,$$

daher hat man auch:

$$n\int e^{mx}Cos.nx\,dx+m\int e^{mx}Sin.nx\,dx = e^{mx}Sin.nx\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{mx}Cos.nx\,dx &= \frac{m\,Cos.nx+n\,Sin.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx} + Const\\ \int e^{mx}Sin.nx\,dx &= \frac{m\,Sin.nx-n\,Cos.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx} + Const.\end{aligned}\right\} \quad (150)$$

wo m und n beliebige constante Größen vorstellen.

Wird ferner der Kürze wegen:

$$M_1 = \frac{m\,Cos.nx+n\,Sin.nx}{m^2+n^2}\cdot e^{mx}\,,$$

$$M_2 = \frac{m\,\mathrm{Sin}.nx - n\,\mathrm{Cos}.nx}{m^2+n^2} \cdot e^{mx},$$

gesetzt, und differenzirt man die Gleichungen (150) p mal nach einander in Bezug auf m, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \int x^p e^{mx}\mathrm{Cos}.nx\,dx &= \frac{d^p M_1}{dm^p} + \text{Const.} \\ \int x^p e^{mx}\mathrm{Sin}.nx\,dx &= \frac{d^p M_2}{dm^p} + \text{Const.} \end{aligned}\right\} \quad (151)$$

Die Werthe dieser zwei Integralausdrücke kann man auch, wie in der folgenden Nr. gezeigt werden soll, durch Recursionsgleichungen bestimmen: es stellen demnach die zwei letzten Gleichungen die Auflösungen dieser Recursionsgleichungen oder der Gleichungen (152) und (153), (154) und (155) der folgenden Nr. dar.

89. Wir gelangen am schnellsten durch die sogenannte theilweise Integration (Anmerkung zu Nr. 56) zu diesen Recursionsgleichungen. Setzt man in die Gleichung (4) Nr. 38:

$$d.\,f(x) = e^{mx}\mathrm{Cos}.nx\,dx \quad \text{und} \quad F(x) = x^p,$$

so giebt die erste der Gleichungen (150),

$$f(x) = \frac{m\,\mathrm{Cos}.nx + n\,\mathrm{Sin}.nx}{m^2+n^2} \cdot e^{mx},$$

und wegen

$$d.\,F(x) = p x^{p-1} dx,$$

hat man folgende Recursionsgleichung:

$$(m^2+n^2)u_p + pmu_{p-1} + pnv_{p-1} = x^p e^{mx}(m\,\mathrm{Cos}.nx + n\,\mathrm{Sin}.nx), \quad (152)$$

wo der Kürze wegen,

$$\left.\begin{aligned} u_p &= \int x^p e^{mx}\mathrm{Cos}.nx\,dx, \\ v_p &= \int x^p e^{mx}\mathrm{Sin}.nx\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

gesetzt worden ist.

Wird ferner in derselben Gleichung (4) folgende Annahme getroffen:

$$d.\,f(x) = e^{mx}\mathrm{Sin}.nx\,dx \quad \text{und} \quad F(x) = x^p,$$

so erhält man, mit Beachtung der zweiten der Gleichungen (150), folgende Recursionsgleichung:

$$(m^2+n^2)v_p + pmv_{p-1} - pnu_{p-1} = x^p e^{mx}(m\,\mathrm{Sin}.nx - n\,\mathrm{Cos}.nx). \quad (153)$$

Läßt man in der vorhergehenden Recursionsgleichung p in p + 1 übergehen, dann hat man auch:

$$\int \frac{(nA_1 - mB_1)dy}{\varphi(2npy) - Cos.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{p}\left\{ arc.tng.\left[\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)} Cotng. \frac{my}{2}\right] + (-1)^{p-q} arc.tng.\left[\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)} tng. \frac{my}{2}\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k Cos. \frac{q}{p} k\pi \,.\, arc.tang. \frac{\varphi_1(ny)Sin.my}{Cos. \frac{k\pi}{p} - \varphi(ny)Cos.my} + C. \quad (162)$$

$$\int \frac{(mA_2 - nB_2)dy}{\varphi(2npy) + Cos.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k Sin. \frac{qk'\pi}{2} \log. \left\{ \varphi(ny) - Cos.\left(k'\frac{\pi}{2} + my\right)\right\} \left\{\varphi(ny) - Cos.\left(k'\frac{\pi}{2} - my\right)\right\} + C. \quad (163)$$

$$\int \frac{(nA_2 + mB_2)dy}{\varphi(2npy) + Cos.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k Sin. \frac{qk'\pi}{2} \,.\, arc.tang. \frac{\varphi_1(ny)Sin.my}{Cos.k'\frac{\pi}{2} - \varphi(ny)Cos.my} + C. \quad (164)$$

wo der Kürze wegen $k' = \frac{2k-1}{p}$ gesetzt wurde.

Diese vier Gleichungen, die ihren Ursprung in den Gleichungen (140) und (141) haben, bestehen, wie diese Gleichungen, für alle ganzen Zahlenwerthe von p und q, die den Bedingungen:

$$p-q \gtreqless 1 \,, \quad \text{und} \quad p+q \gtreqless 0 \,,$$

Genüge thun.

Eben so entspringen aus den Gleichungen (142) und (143), wenn k' in der obigen Bedeutung auftritt, folgende Gleichungen:

$$\int \frac{(mA_3 + nB_3)dy}{\varphi(2npy) - Cos.2mpy} =$$

$$= -\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k Sin. \frac{q}{p} k\pi \log. \frac{\varphi(ny) - Cos.\left(\frac{k\pi}{p} + my\right)}{\varphi(ny) - Cos.\left(\frac{k\pi}{p} - my\right)} + C. \quad (165)$$

$$\int \frac{(nA_3 - mB_3)dy}{\varphi(2npy) - Cos.2mpy} =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k Sin. \frac{q}{p} k\pi \; arc.tang. \frac{\varphi_1(ny)Sin. \frac{k\pi}{p}}{Cos\, my - \varphi(ny)Cos. \frac{k\pi}{p}} + C. \quad (166)$$

$$x^{p-1}(p\,\mathrm{Cos.}nx + nx\,\mathrm{Sin.}nx) =$$
$$= n^2 \int x^p \mathrm{Cos.}nx\,dx + p(p-1)\int x^{p-2}\mathrm{Cos.}nx\,dx\,, \qquad (159)$$
$$x^{p-1}(p\,\mathrm{Sin.}nx - nx\,\mathrm{Cos.}nx) =$$
$$= n^2 \int x^p\,\mathrm{Sin.}nx\,dx + p(p-1)\int x^{p-2}\mathrm{Sin.}nx\,dx\,, \qquad (160)$$

welche ebenfalls für alle Werthe von n und für alle ganzen Werthe von p bestehen.

91. Gehen wir noch einmal zu den Gleichungen (140) bis (143) Nr. 81 zurück, und setzen daselbst:

$$x = (m + n\sqrt{-1})y\,,$$

wo m und n beliebige, von x unabhängige, reelle Größen vorstellen.

Wird nun der Kürze wegen:

$$e^y + e^{-y} = 2\varphi(y)\,,$$

gesetzt, so hat man auch, wenn $\varphi_1(y)$ die abgeleitete Function von $\varphi(y)$ oder den Differenzialquotienten von $\varphi(y)$ nach y vorstellt, die Gleichung:

$$e^y - e^{-y} = 2\varphi_1(y)\,;$$

und es entstehen folgende Gleichungen:

$$\mathrm{Cos.}qx = \varphi(nqy)\,\mathrm{Cos.}mqy - \sqrt{-1}\,\varphi_1(nqy)\,\mathrm{Sin.}mqy\,,$$
$$\mathrm{Cos.}px = \varphi(npy)\,\mathrm{Cos.}mpy - \sqrt{-1}\,\varphi_1(npy)\,\mathrm{Sin.}mpy\,,$$
$$\mathrm{Sin.}qx = \varphi(nqy)\,\mathrm{Sin.}mqy + \sqrt{-1}\,\varphi_1(nqy)\,\mathrm{Cos.}mqy\,,$$
$$\mathrm{Sin.}px = \varphi(npy)\,\mathrm{Sin.}mpy + \sqrt{-1}\,\varphi_1(npy)\,\mathrm{Cos.}mpy\,,$$

Bedenkt man ferner die Gleichheiten:

$$2\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)\,,$$
$$2\varphi_1(x)\varphi_1(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x-z)\,,$$
$$2\varphi(x)\varphi_1(z) = \varphi_1(x+z) - \varphi_1(x-z)\,,$$
$$2\varphi_1(x)\varphi(z) = \varphi_1(x+z) + \varphi_1(x-z)\,,$$

wie auch die Gleichungen:

$$\varphi(o) = 1\,, \qquad \varphi_1(o) = o\,;$$

so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{Cos.}qx}{\mathrm{Sin.}px} = \frac{\varphi[n(p-q)y]\mathrm{Sin.}m(p+q)y + \varphi[n(p+q)y]\mathrm{Sin.}m(p-q)y}{\varphi(2npy) - \mathrm{Cos.}2mpy}$$
$$- \sqrt{-1}\,\frac{\varphi_1[n(p+q)y]\mathrm{Cos.}m(p-q)y + \varphi_1[n(p-q)y]\mathrm{Cos.}m(p+q)y}{\varphi(2npy) - \mathrm{Cos.}2mpy}\,,$$

$$\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Cos.}px}=\frac{\varphi[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y-\varphi[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy}$$
$$+\sqrt{-1}\,\frac{\varphi_1[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y-\varphi_1[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy},$$

$$\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Sin.}px}=\frac{\varphi[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y-\varphi[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y}{\varphi(2npy)-\text{Cos.}2mpy}$$
$$-\sqrt{-1}\,\frac{\varphi_1[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y-\varphi_1[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y}{\varphi(2npy)-\text{Cos.}2mpy},$$

$$\frac{\text{Cos.}qx}{\text{Cos.}px}=\frac{\varphi[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y+\varphi[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy}$$
$$+\sqrt{-1}\,\frac{\varphi_1[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y+\varphi_1[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy}.$$

Wenn ferner, der Kürze wegen, folgende Gleichungen festgestellt werden:

$$A_1=\varphi[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y+\varphi[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y,$$
$$B_1=\varphi_1[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y+\varphi_1[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y,$$
$$A_2=\varphi[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y-\varphi[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y,$$
$$B_2=\varphi_1[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y-\varphi_1[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y,$$
$$A_3=\varphi[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y-\varphi[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y,$$
$$B_3=\varphi_1[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y-\varphi_1[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y,$$
$$A_4=\varphi[n(p+q)y]\text{Cos.}m(p-q)y+\varphi[n(p-q)y]\text{Cos.}m(p+q)y,$$
$$B_4=\varphi_1[n(p-q)y]\text{Sin.}m(p+q)y+\varphi_1[n(p+q)y]\text{Sin.}m(p-q)y,$$

und die Gleichung

$$dx=(m+n\sqrt{-1})\,dy,$$

berücksichtiget wird, so erhält man:

$$\frac{\text{Cos.}qx}{\text{Sin.}px}dx=\frac{mA_1+nB_1+\sqrt{-1}(nA_1-mB_1)}{\varphi(2npy)-\text{Cos.}2mpy}dy,$$
$$\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Cos.}px}dx=\frac{mA_2-nB_2+\sqrt{-1}(nA_2+mB_2)}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy}dy,$$
$$\frac{\text{Sin.}qx}{\text{Sin.}px}dx=\frac{mA_3+nB_3+\sqrt{-1}(nA_3-mB_3)}{\varphi(2npy)-\text{Cos.}2mpy}dy,$$
$$\frac{\text{Cos.}qx}{\text{Cos.}px}dx=\frac{mA_4-nB_4+\sqrt{-1}(nA_4+mB_4)}{\varphi(2npy)+\text{Cos.}2mpy}dy.$$

Ganz auf demselben Wege und mit Zuziehung der Gleichungen (α) Nr. 84 gelangt man auch auf folgende Gleichungen:

$$\log.\mathrm{Sin}.\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log.[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.my]$$
$$+ \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{arc.tang.}\left\{\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)}\mathrm{Cotang.}\frac{my}{2}\right\},$$

$$\log.\mathrm{Cos}.\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log.[\varphi(ny) + \mathrm{Cos}.my]$$
$$- \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{arc.tang.}\left\{\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)}\mathrm{tang.}\frac{my}{2}\right\},$$

$$\log.\mathrm{Sin}.(\theta + \tfrac{x}{2}) = \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log.[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta + my)]$$
$$+ \sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\left\{\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)}\mathrm{Cotang.}\left(\theta + \frac{my}{2}\right)\right\},$$

$$\log.\mathrm{Sin}.(\theta - \tfrac{x}{2}) = \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log.[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta - my)]$$
$$- \sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\left\{\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)}\mathrm{Cotang.}\left(\theta - \frac{my}{2}\right)\right\},$$

und aus den zwei letzten Gleichungen folgert man endlich:

$$\log.\mathrm{Sin}.(\theta + \tfrac{x}{2})\,\mathrm{Sin}.(\theta - \tfrac{x}{2}) =$$
$$= \log.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log.[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta + my)]\,[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta - my)]$$
$$+ \sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{\varphi_1(ny)\mathrm{Sin}.my}{\mathrm{Cos}.2\theta - \varphi(ny)\mathrm{Cos}.my},$$

$$\log.\frac{\mathrm{Sin}.(\theta + \frac{x}{2})}{\mathrm{Sin}.(\theta - \frac{x}{2})} = \tfrac{1}{2}\log.\frac{\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta + my)}{\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.(2\theta - my)}$$
$$+ \sqrt{-1}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{\varphi_1(ny)\mathrm{Sin}.2\theta}{\mathrm{Cos}.my - \varphi(ny)\mathrm{Cos}.2\theta}.$$

Werden alle diese Ergebnisse in die zu Anfang dieser Nr. citirten Gleichungen eingesetzt, und die imaginären von den reellen Theilen, nach bekannter Weise, gesondert; so ergeben sich folgende neue Integralbestimmungen:

$$\int\frac{(mA_1 + nB_1)dy}{\varphi(2npy) - \mathrm{Cos}.2mpy} =$$
$$= \frac{1}{2p}\left\{\log.[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.my] + (-1)^{p-q}\log.[\varphi(ny) + \mathrm{Cos}.my]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k\mathrm{Cos}.\frac{q}{p}k\pi\log.\left\{\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{k\pi}{p} + my\right)\right\}\left\{\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{k\pi}{p} - my\right)\right\} + C. \quad (161)$$

$$\int \frac{(nA_1 - mB_1)dy}{\varphi(2npy) - \text{Cos}.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{p}\left\{ \text{arc.tng.}\left[\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)} \text{Cotng.}\frac{my}{2}\right] + (-1)^{p-q} \text{arc.tng.}\left[\frac{\varphi_1\left(\frac{ny}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{ny}{2}\right)} \text{tng.}\frac{my}{2}\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k \text{Cos.}\frac{q}{p}k\pi \,.\text{arc.tang.}\frac{\varphi_1(ny)\text{Sin.}my}{\text{Cos.}\frac{k\pi}{p} - \varphi(ny)\text{Cos.}my} + C. \qquad (162)$$

$$\int \frac{(mA_2 - nB_2)dy}{\varphi(2npy) + \text{Cos}.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{2p}\cdot\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k \text{Sin.}\frac{qk'\pi}{2} \log.\left\{\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(k'\frac{\pi}{2} + my\right)\right\} \left\{\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(k'\frac{\pi}{2} - my\right)\right\} + C. \quad (163)$$

$$\int \frac{(nA_2 + mB_2)dy}{\varphi(2npy) + \text{Cos}.2mpy} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k \text{Sin.}\frac{qk'\pi}{2}\,.\,\text{arc.tang.}\frac{\varphi_1(ny)\text{Sin.}my}{\text{Cos.}k'\frac{\pi}{2} - \varphi(ny)\text{Cos.}my} + C. \qquad (164)$$

wo der Kürze wegen $k' = \frac{2k-1}{p}$ gesetzt wurde.

Diese vier Gleichungen, die ihren Ursprung in den Gleichungen (140) und (141) haben, bestehen, wie diese Gleichungen, für alle ganzen Zahlenwerthe von p und q, die den Bedingungen:

$$p-q \gtreqless 1, \quad \text{und} \quad p+q \gtreqless 0,$$

Genüge thun.

Eben so entspringen aus den Gleichungen (142) und (143), wenn k' in der obigen Bedeutung auftritt, folgende Gleichungen:

$$\int \frac{(mA_3 + nB_3)dy}{\varphi(2npy) - \text{Cos}.2mpy} =$$

$$= -\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k \text{Sin.}\frac{q}{p}k\pi \log.\frac{\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{k\pi}{p} + my\right)}{\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{k\pi}{p} - my\right)} + C. \qquad (165)$$

$$\int \frac{(nA_3 - mB_3)dy}{\varphi(2npy) - \text{Cos}.2mpy} =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1} (-1)^k \text{Sin.}\frac{q}{p}k\pi \,\text{arc.tang.}\frac{\varphi_1(ny)\text{Sin.}\frac{k\pi}{p}}{\text{Cos}\,my - \varphi(ny)\text{Cos.}\frac{k\pi}{p}} + C. \qquad (166)$$

$$\int\frac{(mA_4-nB_4)dy}{\varphi(2npy)+Cos.2mpy}=$$

$$=-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k Cos.\frac{qk'\pi}{2}\log.\frac{\varphi(ny)-Cos.\left(k'\frac{\pi}{2}+my\right)}{\varphi(ny)-Cos.\left(k'\frac{\pi}{2}-my\right)}+C. \quad (167)$$

$$\int\frac{(nA_4+mB_4)dy}{\varphi(2npy)+Cos.2mpy}=$$

$$=-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k Cos.\frac{qk'\pi}{2}\,arc.tang.\frac{\varphi_1(ny)Sin.k'\frac{\pi}{2}}{Cos.my-\varphi(ny)Cos.k'\frac{\pi}{2}}+C. \quad (168)$$

welche jenen ganzen Werthen von p und q entsprechen, die den Bedingungen:

$$p-q \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad p+q > o\,,$$

nachkommen.

92. Die Gleichungen (161) bis (164) bestehen auch noch für

$$q=-p\,;$$

wird daher in den Gleichungen (161) und (163) diese Annahme gemacht, so hat man zuerst,

$$A_1 = Sin.2mpy\,,\quad B_1=\varphi_1(2npy)\,,$$

$$A_2 = -Sin.2mpy\,,\; B_2 = -\,\varphi_1(2npy)\,,$$

wodurch dann die angeführten Gleichungen in folgende übergehen:

$$\int\frac{mSin.2mpy+n\varphi_1(2npy)}{-Cos.2mpy+\varphi(2npy)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2p}\log.[\varphi(ny)-Cos.my][\varphi(ny)+Cos.my]$$

$$+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\log.\left[\varphi(ny)-Cos.\left(\frac{k\pi}{p}+my\right)\right]\left[\varphi(ny)-Cos.\left(\frac{k\pi}{p}-my\right)\right]+C.$$

$$\int\frac{-mSin.2mpy+n\varphi_1(2npy)}{Cos.2mpy+\varphi(2npy)}\,dy=$$

$$+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=p}\log.\left[\varphi(ny)-Cos.\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}+my\right)\right]\left[\varphi(ny)-Cos.\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}-my\right)\right]+C.$$

Die Integralausdrücke links der Gleichheitszeichen dieser zwei Gleichungen kann man auch durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\int\frac{mSin.2mpy+n\varphi_1(2npy)}{-Cos.2mpy+\varphi(2npy)}\,dy=\frac{1}{2p}\log.[\varphi(2npy)-Cos.2mpy]+C.$$

$$\int \frac{-m\,\mathrm{Sin}.2mpy + n\varphi_1(2npy)}{\mathrm{Cos}.2mpy + \varphi(2npy)}\,dy = \frac{1}{2p}\log.[\varphi(2npy) + \mathrm{Cos}.2mpy] + C.$$

Wenn also A und B zwei willkührliche, von y unabhängige Größen vorstellen, so entspringen folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi(2npy) - \mathrm{Cos}.2mpy = A\,&[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.my][\varphi(ny) + \mathrm{Cos}.my]\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{\pi}{p} - my\right)\right]\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{2\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{2\pi}{p} - my\right)\right]\\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{(p-1)\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{(p-1)\pi}{p} - my\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(2npy) + \mathrm{Cos}.2mpy = B&\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{\pi}{2p} - my\right)\right]\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{3\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{3\pi}{2p} - my\right)\right]\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{5\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{5\pi}{2p} - my\right)\right]\\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\times \left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{(2p-1)\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.\left(\frac{(2p-1)\pi}{2p} - my\right)\right].\end{aligned}$$

Die zwei willkührlichen Constanten A und B bestimmt man dadurch, daß man irgend eine Annahme über y trifft. Lassen wir, analog wie in Nr. 82, y ohne Ende abnehmen, so geht:

$$\varphi(2npy) - \mathrm{Cos}.2mpy \quad \text{über in} \quad 2(n^2+m^2)p^2\omega^2,$$

$$\varphi(ny) - \mathrm{Cos}.my \quad \text{über in} \quad \tfrac{1}{2}(n^2+m^2)\omega^2,$$

wo ω eine unendlich klein werdende Größe bedeutet, und die vorigen zwei Gleichungen bieten folgende Resultate zur Bestimmung von A und B dar:

$$2p^2 = A\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{\pi}{p}\right)^2\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{2\pi}{p}\right)^2\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{3\pi}{p}\right)^2\ldots\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{(p-1)\pi}{p}\right)^2,$$

$$2 = B\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{\pi}{2p}\right)^2\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{3\pi}{2p}\right)^2\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{5\pi}{2p}\right)^2\ldots\left(1 - \mathrm{Cos}.\frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)^2,$$

oder:

$$p^2 = 2^{2p-3}A\left(\mathrm{Sin}.\frac{\pi}{2p}\right)^4\left(\mathrm{Sin}.\frac{2\pi}{2p}\right)^4\left(\mathrm{Sin}.\frac{3\pi}{2p}\right)^4\ldots\left(\mathrm{Sin}.\frac{(p-1)\pi}{2p}\right)^4,$$

$$2 = 2^{2p}\,B\left(\mathrm{Sin}.\frac{\pi}{4p}\right)^4\left(\mathrm{Sin}.\frac{3\pi}{4p}\right)^4\left(\mathrm{Sin}.\frac{5\pi}{4p}\right)^4\ldots\left(\mathrm{Sin}.\frac{(2p-1)\pi}{4p}\right)^4,.$$

also hat man:

$$\varphi(2npy) - \text{Cos.}2mpy =$$

$$= p^2[\varphi(2ny) - \text{Cos.}2my]$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{\pi}{p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{\pi}{2p}\right)^4}$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{2\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{2\pi}{p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{2\pi}{2p}\right)^4}$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{3\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{3\pi}{p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{3\pi}{2p}\right)^4}$$

$$\times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{(p-1)\pi}{p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{(p-1)\pi}{p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{(p-1)\pi}{2p}\right)^4}. \quad \text{(I)}$$

$$\varphi(2npy) + \text{Cos.}2mpy =$$

$$= 2\frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{\pi}{2p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{\pi}{4p}\right)^4}$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{3\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{3\pi}{2p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{3\pi}{4p}\right)^4}$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{5\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{5\pi}{2p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{5\pi}{4p}\right)^4}$$

$$\times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\times \frac{\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{(2p-1)\pi}{2p} + my\right)\right]\left[\varphi(ny) - \text{Cos.}\left(\frac{(2p-1)\pi}{2p} - my\right)\right]}{2^2\left(\text{Sin.}\frac{(2p-1)\pi}{4p}\right)^4}. \quad \text{(II)}$$

93. Wir haben die Werthbestimmung so manches Integralausdruckes von der Auflösung einer Recursionsgleichung abhängig zu machen gesucht: aus diesem Grunde erachten wir es nicht für überflüssig, wenigstens die Auflösung der sogenannten zweigliederigen Recursionsgleichungen hier noch aufzunehmen.

Stellt man nämlich durch u_p eine von der ganzen Zahl p abhängige Größe oder Function dar, und hat man zur Bestimmung von u_p eine Gleichung wie die folgende:

$$f(p)u_p + f'(p)u_{p-1} = f''(p)\,, \tag{A}$$

wo $f(p)$, $f'(p)$, $f''(p)$ bekannte Functionen von p sind; dann wird diese Gleichung (A) eine zweigliedrige Recursionsgleichung genannt.

Um aus dieser Gleichung den Werth von u_p als Function von p ausgedrückt zu erhalten, schlagen wir folgenden Weg ein.

Man setze statt p nach und nach die ganzen Zahlenwerthe: 1, 2, 3, ... p, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(1)u_1 &+ f'(1)u_0 = f''(1)\,, \\ f(2)u_2 &+ f'(2)u_1 = f''(2)\,, \\ f(3)u_3 &+ f'(3)u_2 = f''(3)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f(p-1)u_{p-1} &+ f'(p-1)u_{p-2} = f''(p-1)\,, \\ f(p)u_p &+ f'(p)u_{p-1} = f''(p)\,; \end{aligned}$$

werden diese Gleichungen, in der Ordnung wie sie hier aufgestellt sind, mit den unbekannten Größen:

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \lambda_3\,,\ \ldots\ \lambda_{p-1}\,,\ \lambda_p$$

multiplicirt und hierauf addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f'(1)u_0 &+ [\lambda_1 f(1) + \lambda_2 f'(2)]u_1 \\ &+ [\lambda_2 f(2) + \lambda_3 f'(3)]u_2 \\ &+ [\lambda_3 f(3) + \lambda_4 f'(4)]u_3 \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ [\lambda_{p-2} f(p-2) + \lambda_{p-1} f'(p-1)]u_{p-2} \\ &+ [\lambda_{p-1} f(p-1) + \lambda_p f'(p)]u_{p-1} + \lambda_p f(p)u_p = \\ = \lambda_1 f''(1) + \lambda_2 f''(2) &+ \lambda_3 f''(3) + \ldots + \lambda_{p-1} f''(p-1) + \lambda_p f''(p)\,. \end{aligned}$$

Wenn diese willkührlichen Größen λ_1, λ_2, ... λ_p durch folgende zweigliederige Recursionsgleichung:

$$\lambda_p f'(p) + \lambda_{p-1} f(p-1) = 0\,, \tag{α}$$

bestimmt werden, in der p aller ganzen Zahlenwerthe von 1 bis p fähig ist, so geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\lambda_p f(p) u_p =$$
$$= -\lambda_1 f'(1) u_0 + \lambda_1 f''(1) + \lambda_2 f''(2) + \lambda_3 f''(3) + \ldots + \lambda_p f''(p) ; \qquad (\beta)$$

und wenn in die Gleichung (α) statt p nach und nach eine der Zahlen: 2, 3, 4, . . . p gesetzt wird, so findet man:

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \frac{f(1)}{f'(2)},$$

$$\lambda_3 = +\lambda_1 \frac{f(1)f(2)}{f'(2)f'(3)},$$

$$\lambda_4 = -\lambda_1 \frac{f(1)f(2)f(3)}{f'(2)f'(3)f'(4)},$$

. . . .

$$\lambda_p = (-1)^{p-1} \lambda_1 \frac{f(1)f(2)f(3) \ldots f(p-1)}{f'(2)f'(3)f'(4) \ldots f'(p)},$$

daher geht die Gleichung (β), nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors λ_1, über in:

$$f(p) u_p =$$
$$= (-1)^p f'(1) \frac{f'(p)f'(p-1)f'(p-2) \ldots f'(3)f'(2)}{f(p-1)f(p-2)f(p-3) \ldots f(2)f(1)} u_0$$
$$+ f''(p) - f''(p-1) \frac{f'(p)}{f(p-1)} + f''(p-2) \frac{f'(p)f'(p-1)}{f(p-1)f(p-2)} \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1} f''(1) \frac{f'(p)f'(p-1)f'(p-2) \ldots f'(2)}{f(p-1)f(p-2)f(p-3) \ldots f(1)}, \qquad (B)$$

welche Gleichung die verlangte Auflösung der vorgelegten zweigliederigen Recursionsgleichung (A) angiebt.

Mit der Anwendung dieses Ergebnisses auf einige besondere Fälle werden wir uns in den folgenden Nrn. beschäftigen.

94. Man setze

$$u_p = \int \frac{x^{2p} dx}{\sqrt{a+bx^2}},$$

dann hat man, vermöge der Gleichung (68) Nr. 57, folgende Recursionsgleichung:

$$2bpu_p + a(2p-1)u_{p-1} = x^{2p-1}\sqrt{a+bx^2}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung (A) vorhergehender Nr., so ist:

$$f(p) = 2bp\,,\ f'(p) = a(2p-1)\,,\ f''(p) = x^{2p-1}\sqrt{a+bx^2}\ ;$$

folglich hat man mit Zuziehung der Gleichung (B) derselben Nr.:

$$\int\frac{x^{2p}dx}{\sqrt{a+bx^2}} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2p}\left(\frac{a}{b}\right)^p \frac{2p-1}{2p-2}\cdot\frac{2p-3}{2p-4}\cdot\frac{2p-5}{2p-6}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} x^{2p-1} - \frac{a}{b}\cdot\frac{2p-1}{2p-2}x^{2p-3} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{2p-1}{2p-2}\cdot\frac{2p-3}{2p-4}x^{2p-5} \\ -\left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{2p-1}{2p-2}\cdot\frac{2p-3}{2p-4}\cdot\frac{2p-5}{2p-6}x^{2p-7} + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ +(-1)^{p-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1}\cdot\frac{2p-1}{2p-2}\cdot\frac{2p-3}{2p-4}\cdots\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot x \end{array}\right\}\cdot\frac{\sqrt{a+bx^2}}{2pb}\,. \qquad (169)$$

Wird ferner,

$$u_p = \int\frac{x^{2p+1}dx}{\sqrt{a+bx^2}}\,,$$

gesetzt, so giebt die Gleichung (69) Nr. 57 die Recursionsgleichung:

$$b(2p+1)u_p + 2apu_{p-1} = x^{2p}\sqrt{a+bx^2}\ ;$$

daher erhält man mit Zuziehung der Gleichung (B) folgende Auflösung:

$$\int\frac{x^{2p+1}dx}{\sqrt{a+bx^2}} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2p+1}\left(\frac{a}{b}\right)^p\cdot\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3}\cdot\frac{2p-4}{2p-5}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} x^{2p} - \frac{a}{b}\cdot\frac{2p}{2p-1}x^{2p-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3}x^{2p-4} \\ -\left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3}\cdot\frac{2p-4}{2p-5}x^{2p-6} + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +(-1)^{p-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1}\cdot\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p-2}{2p-3}\cdot\frac{2p-4}{2p-5}\cdots\frac{4}{3}\cdot x^2 \end{array}\right\}\cdot\frac{\sqrt{a+bx^2}}{(2p+1)b}\,. \qquad (170)$$

95. Ferner setze man:

$$u_p = \int x^p e^x dx\,,$$

so hat man, wenn in der Gleichung (156) Nr. 90 $m = 1$ angenommen wird, folgende Recursionsgleichung:

$$u_p + pu_{p-1} = x^p e^x\ ;$$

da man hier

$$f(p) = 1\,,\ f'(p) = p\,,\ f''(p) = x^p e^x$$

hat, so geht die Gleichung (B) über in:

$$\int x^p e^x dx =$$
$$= (-1)^p . 1.2.3 \ldots p \int e^x dx$$
$$+ (-1)^{p-1} . 2.3 \ldots p e^x \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \ldots + \frac{(-1)^{p-1} x^p}{2.3 \ldots p} \right\} ,$$

und wegen

$$\int e^x dx = e^x ,$$

hat man auch:

$$\int x^p e^x dx =$$
$$= (-1)^p . 1.2.3 \ldots p e^x \left\{ 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3 \ldots p} \right\} + C. \quad (171)$$

Läßt man hier x in mx und e^m in a übergehen, so hat man auch:

$$\int x^p a^x dx =$$
$$= \frac{(-1)^p a^x}{(\lg.a)^{p+1}} . 1.2.3 \ldots p \left\{ 1 - x \lg.a + \frac{x^2}{1.2} (\lg.a)^2 \ldots \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3 \ldots p} (\lg.a)^p \right\} + C. \quad (172)$$

Geht ferner in der Gleichung (171) x in $\log.x$ über, dann hat man:

$$\int (\log.x)^p dx =$$
$$= (-1)^p . 1.2.3 \ldots p.x \left\{ 1 - \log.x + \frac{(\log.x)^2}{1.2} \ldots \frac{(-1)^p (\log.x)^p}{1.2.3 \ldots p} \right\} + C. \quad (173)$$

Läßt man endlich in der Gleichung (172) x in $\log.x$ und $\log.a$ in m übergehen, so hat man auch:

$$\int x^{m-1} (\log.x)^p dx =$$
$$= \frac{(-1)^p x^m}{m^{p+1}} . 1.2 \ldots p \left\{ 1 - m \lg.x + \frac{m^2}{1.2} (\lg.x)^2 - \ldots \frac{(-1)^p m^p}{1.2.3 \ldots p} (\lg.x)^p \right\} + C. \quad (174)$$

96. Es sei ferner

$$u_p = \int x^{2p} \operatorname{Cos}.mx dx ;$$

für das vorliegende Integrale bietet die Gleichung (159) Nr. 90 folgende Recursionsgleichung dar:

$$m^2 u_p + 2p(2p-1) u_{p-1} = x^{2p-1} (mx \operatorname{Sin}.mx + 2p \operatorname{Cos}.mx) .$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (A), so hat man:

$$f(p) = m^2 p^0 , \quad f'(p) = 2p(2p-1) ,$$
$$f''(p) = x^{2p-1} (mx \operatorname{Sin}.mx + 2p \operatorname{Cos}.mx) ;$$

bedenkt man noch die Gleichung:

$$\int \operatorname{Cos}.mx dx = \frac{1}{m} \operatorname{Sin}.mx ,$$

$$\int e^{x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1.2.3.4\ldots(2p-1)2p}{(a+2^2)(a+4^2)\ldots[a+(2p)^2]}\left\{\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{a}}\varphi_1(x)\right\} e^{x\sqrt{a}} + C. \qquad (179)$$

Wird ferner

$$u_p = \int e^{x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p+1}dx$$

gesetzt, so findet man zuerst die Recursionsgleichung:

$$[a+(2p+1)^2]u_p - (2p+1)2pu_{p-1} =$$

$$= e^{x\sqrt{a}}(\sqrt{a}.\,\mathrm{Sin}.x - (2p+1)\mathrm{Cos}.x)\mathrm{Sin}.x^{2p}\,, \qquad (\alpha')$$

und mit Zuziehung der allgemeinen Gleichungen (A) und (B), wie der zweiten der Gleichungen (150) Nr. 88, erhält man, wenn abkürzend

$$\psi(x) = \frac{a}{1}\mathrm{Sin}.x + \frac{a(a+1^2)}{1.2.3}\mathrm{Sin}.x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{a(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p-1)^2]}{1.2.3.4.5\ldots\ldots 2p(2p+1)}\mathrm{Sin}.x^{2p+1} \qquad (\beta')$$

und die Ableitung von $\psi(x)$ oder:

$$\psi_1(x) = a\left\{1 + \frac{a+1^2}{1.2}\mathrm{Sin}.x^2 + \frac{(a+1^2)(a+3^2)}{1.2.3.4}\mathrm{Sin}.x^4 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p-1)^2]}{1.2.3.4\ldots\ldots(2p-1)2p}\mathrm{Sin}.x^{2p}\right\}\mathrm{Cos}.x \qquad (\gamma')$$

gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int e^{x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1.2.3.4\ldots\ldots 2p(2p+1)}{(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p+1)^2]}\left\{\psi(x) - \frac{1}{\sqrt{a}}\psi_1(x)\right\} e^{x\sqrt{a}} + C. \quad (180)$$

Geht in diesen Gleichungen x in $x + \frac{\pi}{2}$ über, so erhält man noch folgende zwei Gleichungen:

$$\int e^{x\sqrt{a}}\,\mathrm{Cos}.x^{2p}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1.2.3.4\ldots\ldots(2p-1)2p}{(a+2^2)(a+4^2)\ldots[a+(2p)^2]}\left\{\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{a}}\varphi_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\} e^{x\sqrt{a}} + C. \quad (181)$$

$$\int e^{x\sqrt{a}}\,\mathrm{Cos}.x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{1.2.3.4\ldots 2p(2p+1)}{(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p+1)^2]}\left\{\psi\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{a}}\psi_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\} e^{x\sqrt{a}} + C. \quad (182)$$

wo die Werthe von

$$\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad \varphi_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad \psi\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad \psi_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ohne alle Mühe aus den Gleichungen (β), (γ), (β'), (γ') gefunden werden können.

Diese Gleichungen bestehen für alle positiven Werthe von a; dieselben bestehen sogar noch für negative Werthe von a, wenn man

a) bei den Gleichungen (179) und (181) jene negativen Werthe von a ausschließt, die numerisch gleich oder kleiner als $(2p)^2$ sind, und ganze Zahlen vorstellen,

b) bei den Gleichungen (180) und (182) jene negativen Werthe von a ausschließt, die numerisch gleich oder kleiner als $(2p+1)^2$ sind, und ganze Zahlen vorstellen.

In diesen angeführten Ausnahmsfällen hören nämlich die Recursionsgleichungen (α) und (α'), ihre allgemeine Gültigkeit beizubehalten, auf, daher muß auch ein Gleiches von den aus denselben gefolgerten Integralgleichungen Statt haben.

98. Läßt man nun in den Gleichungen der vorhergehenden Nr. a in —a übergehen, und schließt man jene Fälle, deren zu Ende dieser Nr. Erwähnung geschah, von der Betrachtung aus, so gelangt man durchs Umsetzen der imaginären Exponentiellen in trigonometrischen Functionen zu den Werthen noch einiger nicht minder interessanten Integralausdrücke.

Verrichtet man diese Umsetzung zunächst mit den Gleichungen (179) und (181), vertauscht dann $\sqrt{a}$ in m und setzt abkürzend:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{m^2}{1.2}\,Sin.x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\,Sin.x^4 - \dots\dots$$
$$\dots (-1)^p \frac{m^2(m^2-2^2)\;.\;.\;.\;[m^2-(2p-2)^2]}{1.2.3.4\;.\;.\;.\;.\;(2p-1)2p}\,Sin.x^{2p}\,, \qquad (\alpha)$$

und bezeichnet die Ableitung von $\Phi(x)$ durch $\Phi_1(x)$, so daß man

$$\Phi_1(x) = -m^2\Big\{Sin.x - \frac{m^2-2^2}{1.2.3}\,Sin.x^3 + \dots\dots$$
$$\dots + (-1)^{p-1}\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)\;.\;.\;[m^2-(2p-2)^2]}{1.2.3.4\;.\;.\;.\;.\;2p-1}\,Sin.x^{2p-1}\Big\}Cos.x \quad (\beta)$$

hat, so erhält man, wenn zu beiden Seiten der Gleichheitszeichen die reellen von den imaginären Theilen gesondert und respektive einander gleich gesetzt werden, folgende vier Gleichungen:

$$\int Cos.mx.\,Sin.x^{2p}\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^p}{m}.\,M\,\Big\{\Phi(x)\,Sin.mx + \frac{1}{m}\,\Phi_1(x)Cos.mx\Big\} + Const.\,, \qquad (183)$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Sin.}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M\left\{\Phi(x)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Phi_1(x)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{184}$$

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Cos.}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M\left\{\Phi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Phi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{185}$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Cos}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M\left\{\Phi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Phi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{186}$$

wo der Kürze wegen

$$M = \frac{1.2.3.4\;.\;.\;.\;.\;.\;(2p-1)2p}{(m^2-2^2)(m^2-4^2)\;.\;.\;.\;[m^2-(2p)^2]}$$

gesetzt wurde.

Verfährt man auf gleiche Weise mit den Gleichungen (180) und (182) der vorhergehenden Nr., und setzt abkürzend:

$$\Psi(x) = m^2\left\{\text{Sin.}x - \frac{m^2-1^2}{1.2.3}\text{Sin.}x^3 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\right.$$

$$\left.\;.\;.\; + (-1)^p\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\;.\;.\;.\;[m^2-(2p-1)^2]}{1.2.3.4\;.\;.\;.\;.\;.\;2p+1}\text{Sin.}x^{2p+1}\right\}, \tag{α'}$$

und die Ableitung von $\Psi(x)$ oder:

$$\Psi_1(x) = m^2\left\{1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}\text{Sin.}x^2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}\text{Sin.}x^4 - \;.\;.\;.\right.$$

$$\left.\;.\;.\;.\; + (-1)^p.\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\;.\;.\;.\;[m^2-(2p-1)^2]}{1.2.3.4\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;2p}\text{Sin.}x^{2p}\right\}\text{Cos.}x, \tag{β'}$$

so erhält man auch folgende vier Gleichungen:

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Sin.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M_1\left\{\Psi(x)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Psi_1(x)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{187}$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Sin.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M_1\left\{\Psi(x)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Psi_1(x)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{188}$$

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Cos.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M_1\left\{\Psi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Psi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{189}$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Cos.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M_1\left\{\Psi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Psi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \tag{190}$$

wo abkürzend

$$M_1 = \frac{1.2.3.4 \quad . \, . \, . \, . \, . \quad 2p(2p+1)}{(m^2-1^2)(m^2-3^2) \; . \; . \; . \; [m^2-(2p+1)^2]}$$

gesetzt worden ist.

Die vier Gleichungen (183) bis (186) finden für alle Werthe von m Statt, mit Ausnahme der geraden ganzen Werthe, die gleich oder kleiner als 2p sind, und die vier letzten Gleichungen (187) bis (190) finden ebenfalls für alle Werthe von m Statt, wenn man die ungeraden ganzen Werthe, die gleich oder kleiner als 2p+1 sind, ausnimmt.

Wie man sich in irgend einem der so eben erwähnten Ausnahmsfälle zu benehmen habe, um die Werthe der fraglichen Integralien zu erhalten, wollen wir in der nächst folgenden Nr. zeigen.

99. Es sei das Integrale:

$$u = \int Cos.2qx\, Sin.x^{2p} dx \;,$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo wir q und p als ganze Zahlen und $q < p$ voraussetzen. Da die Gleichung (183) der vorhergehenden Nr. auf dieses Integrale nicht angewandt werden kann, so wollen wir im Folgenden zeigen, wie dasselbe auf andere darstellbare Integralien zurück zu führen sei.

Zerlegt man das Product Cos.2qxSin.x in eine Summe, so hat man:

$$Cos.2qx\, Sin.x = \tfrac{1}{2} Sin.(2q+1)x - \tfrac{1}{2} Sin.(2q-1)x \;,$$

wodurch der vorgelegte Werth von u auf folgende Gleichung führt:

$$u = \tfrac{1}{2}\int Sin.(2q+1)x Sin.x^{2p-1}dx - \tfrac{1}{2}\int Sin.(2q-1)x Sin.x^{2p-1}dx \;;$$

ferner ist:

$$Sin.(2q+1)x.Sin.x = \tfrac{1}{2}Cos.2qx - \tfrac{1}{2}Cos.(2q+2)x \;,$$

$$Sin.(2q-1)x.Sin.x = \tfrac{1}{2}Cos.(2q-2)x - \tfrac{1}{2}Cos.2qx \;,$$

daher hat man durch Substitution dieser Ergebnisse in die vorhergehende Gleichung folgende Reductionsgleichung:

$$\int Cos.2qx.Sin.x^{2p}dx = -\tfrac{1}{4}\int Cos.(2q-2)x\, Sin.x^{2p-2}dx$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int Cos.2qxSin.x^{2p-2}dx - \tfrac{1}{4}\int Cos.(2q+2)xSin.x^{2p-2}dx \;.$$

Ein jedes der Integralien rechter Hand vom Gleichheitszeichen ist dem vorgelegten Integrale ähnlich, daher läßt dasselbe eine ähnliche Reduction zu; mithin leuchtet die Möglichkeit ein, das Integrale linker Hand vom Gleichheitszeichen von Integralien, die entweder

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Sin.}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M\left\{\Phi(x)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Phi_1(x)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (184)$$

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Cos.}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M\left\{\Phi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Phi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (185)$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Cos}x^{2p}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M\left\{\Phi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Phi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (186)$$

wo der Kürze wegen

$$M = \frac{1.2.3.4\ \ldots\ldots\ (2p-1)2p}{(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ \ldots\ [m^2-(2p)^2]}$$

gesetzt wurde.

Verfährt man auf gleiche Weise mit den Gleichungen (180) und (182) der vorhergehenden Nr., und setzt abkürzend:

$$\Psi(x) = m^2\left\{\text{Sin.}x - \frac{m^2-1^2}{1.2.3}\text{Sin.}x^3 + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^p\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ \ldots\ [m^2-(2p-1)^2]}{1.2.3.4\ \ldots\ldots\ 2p+1}\text{Sin.}x^{2p+1}\right\}, \quad (\alpha')$$

und die Ableitung von $\Psi(x)$ oder:

$$\Psi_1(x) = m^2\left\{1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}\text{Sin.}x^2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}\text{Sin.}x^4 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^p.\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ \ldots\ [m^2-(2p-1)^2]}{1.2.3.4\ \ldots\ldots\ 2p}\text{Sin.}x^{2p}\right\}\text{Cos.}x, \quad (\beta')$$

so erhält man auch folgende vier Gleichungen:

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Sin.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M_1\left\{\Psi(x)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Psi_1(x)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (187)$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Sin.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M_1\left\{\Psi(x)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Psi_1(x)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (188)$$

$$\int \text{Cos.}mx.\text{Cos.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p}}{m}.M_1\left\{\Psi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx + \frac{1}{m}\Psi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (189)$$

$$\int \text{Sin.}mx.\text{Cos.}x^{2p+1}dx =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{m}.M_1\left\{\Psi\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Cos.}mx - \frac{1}{m}\Psi_1\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\text{Sin.}mx\right\} + \text{Const.}, \quad (190)$$

wo abkürzend

$$M_1 = \frac{1.2.3.4 \;\ldots\ldots\; 2p(2p+1)}{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\;\ldots\;[m^2-(2p+1)^2]}$$

gesetzt worden ist.

Die vier Gleichungen (183) bis (186) finden für alle Werthe von m Statt, mit Ausnahme der geraden ganzen Werthe, die gleich oder kleiner als 2p sind, und die vier letzten Gleichungen (187) bis (190) finden ebenfalls für alle Werthe von m Statt, wenn man die ungeraden ganzen Werthe, die gleich oder kleiner als 2p+1 sind, ausnimmt.

Wie man sich in irgend einem der so eben erwähnten Ausnahmsfälle zu benehmen habe, um die Werthe der fraglichen Integralien zu erhalten, wollen wir in der nächst folgenden Nr. zeigen.

99. Es sei das Integrale:

$$u = \int \text{Cos}.2qx\,\text{Sin}.x^{2p}dx\;,$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo wir q und p als ganze Zahlen und $q < p$ voraussetzen. Da die Gleichung (183) der vorhergehenden Nr. auf dieses Integrale nicht angewandt werden kann, so wollen wir im Folgenden zeigen, wie dasselbe auf andere darstellbare Integralien zurück zu führen sei.

Zerlegt man das Product Cos.2qxSin.x in eine Summe, so hat man:

$$\text{Cos}.2qx\,\text{Sin}.x = \tfrac{1}{2}\text{Sin}.(2q+1)x - \tfrac{1}{2}\text{Sin}.(2q-1)x\;,$$

wodurch der vorgelegte Werth von u auf folgende Gleichung führt:

$$u = \tfrac{1}{2}\int \text{Sin}.(2q+1)x\text{Sin}.x^{2p-1}dx - \tfrac{1}{2}\int \text{Sin}.(2q-1)x\text{Sin}.x^{2p-1}dx\;;$$

ferner ist:

$$\text{Sin}.(2q+1)x.\text{Sin}.x = \tfrac{1}{2}\text{Cos}.2qx - \tfrac{1}{2}\text{Cos}.(2q+2)x\;,$$

$$\text{Sin}.(2q-1)x.\text{Sin}.x = \tfrac{1}{2}\text{Cos}.(2q-2)x - \tfrac{1}{2}\text{Cos}.2qx\;,$$

daher hat man durch Substitution dieser Ergebnisse in die vorhergehende Gleichung folgende Reductionsgleichung:

$$\int \text{Cos}.2qx.\text{Sin}.x^{2p}dx = -\tfrac{1}{4}\int \text{Cos}.(2q-2)x\;\text{Sin}.x^{2p-2}dx$$
$$+\tfrac{1}{2}\int \text{Cos}.2qx\text{Sin}.x^{2p-2}dx - \tfrac{1}{4}\int \text{Cos}.(2q+2)x\text{Sin}.x^{2p-2}dx\;.$$

Ein jedes der Integralien rechter Hand vom Gleichheitszeichen ist dem vorgelegten Integrale ähnlich, daher läßt dasselbe eine ähnliche Reduction zu; mithin leuchtet die Möglichkeit ein, das Integrale linker Hand vom Gleichheitszeichen von Integralien, die entweder

geht hier x in $x\sqrt{-1}$ über, so hat man auch:

$$\int\frac{b+cx^2}{b-cx^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2bc}}\log.\frac{1+\frac{x\sqrt{2bc}}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}}{1-\frac{x\sqrt{2bc}}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}}.$$

Werden diese Gleichungen addirt, so erhält man:

$$\int\frac{\sqrt{b^2+c^2x^4}}{b^2-c^2x^4}dx=\frac{1}{4\sqrt{2bc}}\log.\frac{1+\frac{x\sqrt{2bc}}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}}{1-\frac{x\sqrt{2bc}}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2bc}}\text{arc.tang.}\frac{x\sqrt{2bc}}{\sqrt{b^2+c^2x^4}}+\text{Const.}; \quad (196)$$

geht in dieser Gleichung c in $c\sqrt{-1}$ über, setzt dann

$$\sqrt[4]{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1}),$$

und zieht die Gleichungen (α) Nr. 81 in Betrachtung, so erhält man zunächst folgende Gleichung:

$$\int\frac{\sqrt{b^2-c^2x^4}}{b^2+c^2x^4}dx=\frac{1}{8\sqrt{bc}}\log.\frac{b^2+2bcx^2-c^2x^4+2\sqrt{bc}.x\sqrt{b^2-c^2x^4}}{b^2+2bcx^2-c^2x^4-2\sqrt{bc}.x\sqrt{b^2-c^2x^4}}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{bc}}.\text{arc.tang.}\frac{2\sqrt{bc}.x\sqrt{b^2-c^2x^4}}{b^2-2bcx^2-c^2x^4}+\text{Const.},$$

aus welcher auch folgende Gleichung gezogen wird:

$$\int\frac{\sqrt{b^2-c^2x^4}}{b^2+c^2x^4}dx=\frac{1}{8\sqrt{bc}}\log.\frac{\left(1+\sqrt{\frac{c}{b}}.x\sqrt{\frac{b-cx^2}{b+cx^2}}\right)^2}{\left(1-\sqrt{\frac{c}{b}}.x\sqrt{\frac{b-cx^2}{b+cx^2}}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{bc}}.\text{arc.tang.}\frac{2x\sqrt{\frac{c}{b}}.\sqrt{\frac{b+cx^2}{b-cx^2}}}{1-\left(x\sqrt{\frac{c}{b}}.\sqrt{\frac{b+cx^2}{b-cx^2}}\right)^2}+C.,$$

und hieraus endlich:

$$\int\frac{\sqrt{b^2-c^2x^4}}{b^2+c^2x^4}dx=\frac{1}{4\sqrt{bc}}\log.\frac{1+\sqrt{\frac{c}{b}}.x\sqrt{\frac{b-cx^2}{b+cx^2}}}{1-\sqrt{\frac{c}{b}}.x\sqrt{\frac{b-cx^2}{b+cx^2}}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{bc}}\text{arc.tang.}\sqrt{\frac{c}{b}}.x\sqrt{\frac{b+cx^2}{b-cx^2}}+C. \quad (197)$$

Außer diesen Gleichungen läßt sich aus den obigen Gleichungen noch ein Zusammenhang zwischen zwei Integralien ableiten, von dem wir erst bei Gelegenheit der näherungsweisen Berechnung bestimmter Integralien Gebrauch machen werden.

Berücksichtiget man nämlich die obigen Werthe von dx und $1-x^2$, so erhält man:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = a\,\frac{b-cz^2}{b+cz^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{b^2+(2bc-a^2)z^2+c^2z^4}},$$

oder auch:

$$\frac{b+cz^2}{b-cz^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = a\,\frac{dz}{\sqrt{b^2+(2bc-a^2)z^2+c^2z^4}};$$

nun führt die obige Gleichung (α), welche den Zusammenhang zwischen z und x darstellt, auf folgende Gleichung:

$$\frac{b+cz^2}{b-cz^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-4bcx^2}},$$

daher hat man:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{a^2-4bcx^2}} = \frac{dz}{\sqrt{b^2+(2bc-a^2)z^2+c^2z^4}};$$

die bis jetzt unbestimmt gelassenen Constanten a, b, c kann man dergestalt bestimmen, daß

$$b^2+(2bc-a^2)z^2+c^2z^4 = \mu^2(1-z^2)(1-\alpha^2z^2)$$

werde, man setze zur Realisirung dieser Gleichung:

$$a = \mu(1+\alpha)\,,\quad b = \mu\,,\quad c = \alpha\mu\,,$$

so geht dieselbe in eine identische über; wird diese Substitution vollzogen, so hat man:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\alpha^2z^2}} = \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right)^2x^2}}.$$

Da die Integralfunctionen dieser zwei durch das Gleichheitszeichen verbundenen Differenzialausdrücke dieselben sein müssen, wenn der Zusammenhang zwischen x und z nach Gleichung (α), der gegenwärtig in folgenden übergeht:

$$x = \frac{(1+\alpha)z}{1+\alpha z^2}, \tag{I}$$

wiederum hergestellt wird, so hat man auch:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\alpha^2z^2}} = \frac{1}{1+\alpha}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right)^2x^2}}, \tag{II}$$

welches die angekündigte Gleichung ist: gelingt es nun einen dieser Integralausdrücke zu bestimmen, so hat man sofort, mit Zuziehung der vorhergehenden Gleichung (I), auch den zweiten dieser Integralausdrücke bestimmt.

Geht, nach der Ableitungsmethode, in diesen Gleichungen z in Sin.z und x in Sin.x über, so hat man, beim Statthaben der Gleichung:

$$\text{Sin.}x = \frac{(1+\alpha)\,\text{Sin.}z}{1+\alpha\,\text{Sin.}z^2}, \qquad (I')$$

die mit der folgenden:

$$\text{Cos.}x = \frac{\text{Cos.}z.\sqrt{1-\alpha^2\text{Sin.}z^2}}{1+\alpha\,\text{Sin.}z^2} \qquad (I')$$

gleichbedeutend ist, die Gleichung:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-\alpha^2\text{Sin.}z^2}} = \frac{1}{(1+\alpha)}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right)^2\text{Sin.}x^2}}, \qquad (II')$$

von welcher ein Gleiches, wie von der Gleichung (II), ausgesagt werden kann.

102. Wenn n was immer für eine ganze Zahl bedeutet, so stellt eine der Gleichungen (87) — (92) Nr. 65 den Werth des Integralausdruckes:

$$\int\frac{dx}{1\pm x^n}$$

dar; zeigt man den Werth dieses Integrals durch $\varphi(x)$ an, so daß man die Gleichheit:

$$\int\frac{dx}{1\pm x^n} = \varphi(x)$$

hat, dann kann man, nach der Methode der Ableitung, statt x jede Function von x setzen, wodurch die Werthe neuer Integralien gewonnen werden. Läßt man

$$x \text{ in } \frac{ax}{\sqrt[n]{b+cx^n}}$$

übergehen, oder setzt man:

$$x = \frac{az}{\sqrt[n]{b+cz^n}}, \qquad (a)$$

so hat man:

$$\frac{dx}{1+x^n} = \frac{ab}{b+(c+a^n)z^n}\cdot\frac{dz}{\sqrt[n]{b+cz^n}};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $b + (c + a^n)z^n$, welche Größe, vermöge der Gleichung (α), gleich

$$\frac{ba^n(1 + x^n)}{a^n - cx^n}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{a^{n-1}dx}{a^n - cx^n} = \frac{dz}{\sqrt[n]{b + cz^n}} \quad . \qquad (\beta)$$

Wird nun c als positive Größe angesehen, so setze man:

$$a = \sqrt[n]{c},$$

und man hat:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[n]{b+cz^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \int \frac{dx}{1-x^n}, \qquad (198)$$

wo nach der Gleichung (α)

$$x = \frac{z\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{b+cz^n}} \qquad (\alpha')$$

ist. Es hängt somit das Integrale links vom Gleichheitszeichen in (198) von einem, an dem oben citirten Orte bereits bestimmten Integralausdrucke ab. Wird nach vollzogener Integration des Integrals rechts vom Gleichheitszeichen statt x der so eben aufgestellte Werth aus Gleichung (α') eingesetzt, so hat man sofort den Werth des Integrals links vom Gleichheitszeichen.

Hat aber c einen negativen Werth, so ist $-c$ positiv, und man erhält auf analoge Weise wie vorhin:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[n]{b-cz^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \int \frac{dx}{1+x^n}, \qquad (199)$$

wo

$$x = \frac{z\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{b-cz^n}} \qquad (\alpha'')$$

ist. Vollzieht man die Integration zur Rechten vom Gleichheitszeichen, und substituirt den Werth von x aus der letzten Gleichung (α''), so hat man auch den Werth des Integrals zur Linken vom Gleichheitszeichen der Gleichung (199).

Wenden wir uns noch einmal der obigen Gleichung (α) zu, so finden wir zuerst:

$$\frac{ba^n}{a^n - cx^n} = (b + cz^n) ;$$

erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur Potenz $\frac{k-1}{n}$, dividirt dann die so erhaltene Gleichung durch die obige Gleichung (β), so wird man auch auf folgende Gleichung geführt:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[n]{(b+cz^n)^k}} = \frac{a^{n-k}}{\sqrt[n]{b^{k-1}}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(a^n - cx^n)^{n-k+1}}},$$

wo die obige Gleichung (α) den Zusammenhang zwischen z und x angiebt.

Soll aber die Gleichung (α') den Zusammenhang zwischen z und x anzeigen, so hat man:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[n]{(b+cz^n)^k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{cb^{k-1}}} \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k+1}}} ; \qquad (I)$$

und wenn die vorige Gleichung (α'') den Zusammenhang von z und x anzeigen soll, so erhält man:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[n]{(b-cz^n)^k}} = \frac{1}{\sqrt[n]{cb^{k-1}}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-k+1}}} . \qquad (II)$$

Wird in diesen zwei Gleichungen $k = 1$ angenommen, so erhält man die obigen Gleichungen (198) und (199); ferner lehren uns diese Gleichungen den Fall $k > \frac{n}{2}$ und $k < n$ in jenen, wo $k > o$ und $k < \frac{n}{2}$ ist, umsetzen.

103. Nicht minder interessant sind die Beziehungen zwischen Integralien von verschiedenen Formen, die durch den folgenden Zusammenhang zwischen z und x erhalten werden:

$$x = \frac{z}{\sqrt[2n]{a + bz^n + cz^{2n}}} . \qquad (\alpha)$$

Es folgt aus dieser Gleichung zunächst:

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a + bz^n}{a + bz^n + cz^{2n}} \cdot \frac{dz}{\sqrt[2n]{a + bz^n + cz^{2n}}},$$

und nunmehr wollen wir versuchen, verschiedene Functionen von x mit diesem Werthe von dx zu multipliciren, um mit Beiziehung der hier aufgestellten Gleichung (α) verschieden aussehende Integralformen mit einander zu vergleichen.

I. Bestimmt man aus der Gleichung (α) den Werth von $1-x^{2n}$, so gelangt man auf folgende Gleichung:

$$\frac{dx}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+bz^n}{a+bz^n+cz^{2n}-z^{2n}}\cdot\frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}};$$

es ist aber, vermöge derselben Gleichung (α),

$$a+bz^n+cz^{2n}=\frac{z^{2n}}{x^{2n}},$$

daher geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\frac{dx}{x^{2n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+bz^n}{z^{2n}}\cdot\frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}};$$

ferner giebt dieselbe Gleichung (α):

$$\frac{2a+bz^n}{z^{2n}}=\frac{1}{x^nz^n}\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}},$$

daher hat man auch:

$$\frac{dx}{x^n\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{z^n\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}},$$

und wenn beiderseits integrirt wird, erhält man folgende Gleichung:

$$\int\frac{dz}{z^n\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}}=2\int\frac{dx}{x^n\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}}. \qquad (\beta)$$

Obwohl keines dieser zwei Integralien angebbar ist, so ist doch wenigstens so viel gewonnen, daß man das Integrale links vom Gleichheitszeichen, das eine zur $2n^{\text{ten}}$ Ordnung gehörende Wurzelgröße oder irrationale Function enthält, von einem Integrale abhängig dargestellt hat, das nur noch eine zweite Wurzelgröße enthält. Gelingt es, annähernd wenigstens, dieses letztere Integrale zu bestimmen, dann hat man auch, mit Zuziehung der Gleichung (α), das Integrale links vom Gleichheitszeichen bestimmt, und umgekehrt.

II. Sucht man aus der Gleichung (α) den Werth von $1-cx^{2n}$, so erhält man:

$$\frac{dx}{1-cx^{2n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+bz^n}{a+bz^n}\cdot\frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}};$$

ferner giebt dieselbe Gleichung (α):

$$4a+(b^2-4ac)x^{2n}=\frac{(2a+bz^n)^2}{a+bz^n+cz^{2n}},$$

daher hat man auch:

$$\frac{dx}{(1-cx^{2n})\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[2n]{(a+bz^n+cz^{2n})^{n-1}}}{a+bz^n}\cdot dz;$$

diese Gleichung mit der folgenden:

$$bx^n = \frac{bz^n}{\sqrt[2n]{(a+bz^n+cz^{2n})^n}},$$

die aus (α) gezogen wird, multiplicirt, erhält man:

$$\frac{bx^n dx}{(1-cx^{2n})\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{bz^n}{a+bz^n}\cdot\frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}}.$$

Wird diese Gleichung zur ersten der hier aufgestellten Gleichungen addirt und von derselben subtrahirt, so erhält man, wenn überall die auszuführende Integration angezeigt wird, folgende zwei Gleichungen:

$$\int\frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}} =$$

$$= b\int\frac{x^n dx}{(1-cx^{2n})\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}} + \int\frac{dx}{1-cx^{2n}}, \qquad (\gamma')$$

$$\int\frac{dz}{(a+bz^n)\sqrt[2n]{a+bz^n+cz^{2n}}} =$$

$$= -\frac{b}{a}\int\frac{x^n dx}{(1-cx^{2n})\sqrt{4a+(b^2-4ac)x^{2n}}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1-cx^{2n}}, \qquad (\gamma'')$$

von welchen Gleichungen dasselbe, was von der Gleichung (β) I mitgetheilt wurde, ausgesagt werden kann.

104. Aus den Gleichungen (β) und (γ') der vorhergehenden Nr. lassen sich noch einige Gleichungen ableiten, mit deren Mittheilung wir diesen Gegenstand schließen wollen.

I. Läßt man in der Gleichung (β) der vorigen Nr. x in $\frac{1}{x}$ und z in $\frac{1}{z}$ übergehen, so hat man:

$$\int\frac{z^{n-1}dz}{\sqrt[2n]{c+bz^n+az^{2n}}} = 2\int\frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{b^2-4ac+4ax^{2n}}},$$

welche Gleichung nur dann besteht, wenn man auch in der Gleichung (α) derselben Nr. dieselben Umsetzungen mit x und z vornimmt; wird

noch überdieß z^n in z umgesetzt, so geht diese Gleichung (α), nach vorgenommener Umtauschung von a mit c, in folgende über:

$$x = \sqrt[2n]{a+bz+cz^2}, \qquad (\alpha)$$

und die vorhin aufgestellte Gleichung geht über in:

$$\int \frac{dz}{\sqrt[2n]{a+bz+cz^2}} = 2n \int \frac{x^{2n-2}dx}{\sqrt{b^2-4ac+4cx^{2n}}}. \qquad (\beta)$$

II. Geht in der Gleichung (γ') der vorigen Nr. x in $\frac{1}{x}$ und z^n in $\frac{1}{z}$ über, so erhält man, wenn, nach geschehener Vertauschung von a mit c, zwischen z und x die Gleichung:

$$x = \sqrt[2n]{a+bz+cz^2}, \qquad (\alpha')$$

angenommen wird, folgende Gleichung:

$$\int \frac{dz}{(b+cz)\sqrt[2n]{a+bz+cz^2}} =$$

$$= \frac{b}{c}n \int \frac{x^{2n-2}dx}{(a-x^{2n})\sqrt{b^2-4ac+4cx^{2n}}} - \frac{n}{c}\int \frac{x^{2n-2}dx}{a-x^{2n}}. \qquad (\beta')$$

Der besondere Fall dieser Gleichungen, $b = o$, führt, für die Annahme:

$$x = \sqrt[2n]{a+cz^2},$$

auf folgende Gleichung:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt[2n]{a+cz^2}} = -n \int \frac{x^{2n-2}dx}{a-x^{2n}};$$

oder, wenn noch $\frac{1}{x}$ statt x gesetzt wird, wodurch

$$x = \frac{1}{\sqrt[2n]{a+cz^2}} \qquad (\alpha'')$$

erhalten wird, man hat:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt[2n]{a+cz^2}} = -n \int \frac{dx}{1-ax^{2n}}. \qquad (200)$$

Das Integrale rechts vom Gleichheitszeichen wird durch eine der Gleichungen (91) und (92) Nr. 65 dargestellt, wenn man:

$m = o$, $p = n$, und $x\sqrt[2n]{a}$ statt x setzt,

daher hat man auch, wenn nach vollzogener Integration statt x deren

Werth aus Gleichung (α'') eingeführt wird, den Integralausdruck links vom Gleichheitszeichen bestimmt.

Nimmt man endlich mit den obigen Gleichungen (α') und (β') folgende Umformungen vor:

$c = 1$, $b + z$ in kz, $a = \alpha$, $bk = -\beta$, $k^2 = \gamma$ und x in $\frac{1}{x}$,

so erhält man folgende Gleichungen:

$$x = \frac{1}{\sqrt[2n]{\alpha + \beta z + \gamma z^2}}$$

und

$$\int \frac{dz}{z\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}} =$$

$$= -\beta n \int \frac{x^n dx}{(1-\alpha x^{2n})\sqrt{4\gamma + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)x^{2n}}} - n\int \frac{dx}{1-\alpha x^{2n}}\,.$$

Verfährt man nun mit der Variabeln z genau so, wie in Nr. 46. mit der Variabeln x der Gleichung (26) aus Nr. 45 geschah, d. h. läßt man zuerst z in $1+z$ und

α in $\alpha' - \beta' + \gamma'$, β in $\beta' - 2\gamma'$, γ in γ

übergehen, vertauscht hierauf

z in $\frac{b}{a}z$ und α' in $\frac{\alpha}{a^2}$, β' in $\frac{\beta}{ab}$, γ' in $\frac{\gamma}{b^2}$,

so erhält man, nach einigen Reductionen, folgende zwei Gleichungen:

$$x = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}, \qquad (\alpha''')$$

und

$$\int \frac{dz}{(a+bz)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}} =$$

$$= \frac{na^2}{\sqrt[n]{a}} \left\{ (2a\gamma - b\beta) \int \frac{x^n dx}{(a^2b^2 - Ax^{2n})\sqrt{4\gamma a^2 + Bx^{2n}}} - b\int \frac{dx}{a^2b^2 - Ax^{2n}} \right\}, \qquad (\beta''')$$

wo zur Abkürzung:

$A = \alpha b^2 - \beta ab + \gamma a^2$ und $B = \beta^2 - 4\alpha\gamma$,

gesetzt worden ist.

Der Zusammenhang zwischen x und z, nach Gleichung (α'''), wird nicht gestört, wenn man b in $-b$ umsetzt, wodurch dann der Werth des Integrals

$$\int \frac{dz}{(a-bz)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}$$

durch eine ähnliche Gleichung wie (β''') gegeben erscheint; durch Addition und Subtraction dieser Gleichung und der Gleichung (β''') erhält man auch die Integralien:

$$\int\frac{dz}{(a^2-b^2z^2)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}, \quad \int\frac{zdz}{(a^2-b^2z^2)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}$$

durch solche Integralien ausgedrückt, die nur zweite Wurzelgrößen enthalten. Vertauscht man in diesen Gleichungen b in $b\sqrt{-1}$, so erhält man auch die Werthe der Integralausdrücke:

$$\int\frac{dz}{(a^2+b^2z^2)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}, \quad \int\frac{zdz}{(a^2+b^2z^2)\sqrt[2n]{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}$$

durch ähnliche, blos zweite Wurzelgrößen enthaltende Integralien gegeben.

Für alle diese leicht herzustellenden Gleichungen besteht der obige, durch die Gleichung (α''') dargestellte Zusammenhang zwischen x und z.

Drittes Kapitel.

Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien.

§. I.

Einleitende Bemerkungen, und Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz bestimmter Integralien und unendlicher Reihen.

105. In den Nr. 33 — 35 des ersten Buches der Integralrechnung stellten wir die allgemeine Bedeutung eines bestimmten Integrals fest. Gemäß dem an diesen Orten Mitgetheilten, ist jedes bestimmte Integrale der Repräsentant einer algebraischen Summe, einer aus unendlich vielen, unendlich klein werdenden Gliedern zusammengesetzten Reihe, die ihren Ursprung in der zu integrirenden Differenzialfunction hat (Nr. 33). Jeder der Ausdrücke (β) und (β') Nr. 34. stellt das allgemeine Glied dieser Reihe dar; daher ist vor Allem, in jedem vorkommenden Falle, die Untersuchung anzustellen nöthig: ob auch die so eben erwähnten Ausdrücke (β) und (β') der Anforderung, im ganzen Bereiche der Integrationsgrenzen beständig unendlich klein werdend zu verbleiben, ein Genüge thun.

Zum besseren Verstehen des hierüber in Nr. 34 Mitgetheilten, lassen wir einige besondere Fälle folgen, die ganz in gleicher Ordnung den dort aufgeführten, allgemeinen Fällen entsprechen.

I. Es sei das Integrale der Differenzialfunction $x^m dx$ von $x=a$ bis $x=b$ oder das bestimmte Integrale:

$$\int_a^b x^m dx\,,$$

vorgelegt, wo a und b endliche, mit gleichen Zeichen begabte Werthe vorstellen, von denen einer auch Null sein darf.

Da man nach der Grundgleichung (I) Nr. 39 die Gleichung:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

hat, die für alle, die negative Einheit ausschließenden Werthe von m besteht, und da man die willkührliche Constante der Integration als endliche Größe anzunehmen berechtigt ist, so bleibt der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn $m+1$ positiv vorausgesetzt wird, für alle endliche Werthe von x ebenfalls endlich: und es stellt diese Integralfunction eine continuirliche Function von x dar. Es werden sonach, im vorliegenden Falle, die oben angeführten Ausdrücke (β) und (β^1) im ganzen Bereiche der Integrationsgrenzen unendlich klein werdende Größen vorstellen, und man ist, wegen der Gleichung:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

zur Aufstellung der folgenden Gleichungen berechtiget:

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} =$$

$$= \omega_0 a^m + \omega_1(a+\omega_0)^m + \omega_2(a+\omega_0+\omega_1)^m + \ldots + \omega_{n-1}(b-\omega_{n-1})^m,$$

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} =$$

$$= \omega_0(a+\omega_0)^m + \omega_1(a+\omega_0+\omega_1)^m + \ldots + \omega_{n-2}(b-\omega_{n-1})^m + \omega_{n-1}b^m,$$

wo $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ unendlich klein werdende Größen vorstellen, die der Gleichung (5) Nr. 33 genügen.

Eben so erhält man aus der Gleichung (11) Nr. 36

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} = \omega\left\{\tfrac{1}{2}a^m + (a+\omega)^m + (a+2\omega)^m + \ldots + (b-\omega)^m + \tfrac{1}{2}b^m\right\},$$

wo auch ω eine unendlich klein werdende Größe vorstellt.

II. Es sei die Differenzialformel $e^{x^2}dx$ vorgelegt.

Da die Integralfunction dieser Differenzialformel bis jetzt unbekannt ist, die Function e^{x^2} aber, für alle nicht unendlich großwerdende Werthe von x, einen endlichen Werth annimmt, so ist man noch immer zur Annahme einer der folgenden Gleichungen:

$$\int_a^b e^{x^2}dx = \omega_0 e^{a^2} + \omega_1 e^{(a+\omega_0)^2} + \omega_2 e^{(a+\omega_0+\omega_1)^2} + \ldots \omega_{n-1}e^{(b-\omega_{n-1})^2},$$

$$\int_a^b e^{x^2}dx = \omega_0 e^{(a+\omega_0)^2} + \omega_1 e^{(a+\omega_0+\omega_1)^2} + \ldots \omega_{n-2}e^{(b-\omega_{n-1})^2} + \omega_{n-1}e^{b^2},$$

$$\int_a^b e^{x^2}dx = \omega\left\{\tfrac{1}{2}e^{a^2} + e^{(a+\omega)^2} + e^{(a+2\omega)^2} + \ldots\ldots e^{(b-\omega)^2} + \tfrac{1}{2}e^{b^2}\right\}$$

berechtiget, wo $\omega, \omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ die vorige Bedeutung haben, und a sowohl als b beliebige, nur nicht unendlich großwerdende Werthe vorstellen.

III. Zu gleichem Zwecke legen wir uns die Differenzialformel

$$\frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}}$$

vor.

Auch zu diesem Differenziale ist bis jetzt das entsprechende Integrale nicht angebbar; wird noch die Annahme getroffen: es sollen die Integrationsgrenzen a und b zwar endlich und reell, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen begabt sein, so wird man, da die in Nr. 34 durch $\varphi(x)$ dargestellte Function gegenwärtig

$$\frac{e^x}{\sqrt[m]{x}}$$

ist, und diese Function beim Uebergange von $x=a$ bis $x=b$ einmal, bei $x=o$, unendlich groß wird, die Ausdrücke (β) und (β') der citirten Nr. zu Rathe ziehen müssen, um auf die Beschaffenheit der unbekannten Integralfunction rücksichtlich ihrer Continuität in der nächsten Umgebung dieses Nullwerthes von x zurückschließen zu können. Setzt man, zu diesem Zwecke, die untere Integrationsgrenze a als negativ voraus, und stellt die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \{a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 + \ldots + \omega_k\} = o$$

auf, so kann man entweder:

$$a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 + \ldots + \omega_k = \omega_{k+1},$$

oder:

$$a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 + \ldots + \omega_k = \omega_k,$$

setzen, wo $k < n$ und wo man nach Gleichung (5) Nr. 34

$$a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 + \ldots + \omega_k + \omega_{k+1} + \ldots + \omega_{n-1} = b$$

hat; für die erste Annahme geht der Ausdruck (β) über in:

$$\frac{\omega_{k+1} e^{\omega_{k+1}}}{\sqrt[m]{\omega_{k+1}}};$$

und bei der zweiten Annahme geht der Ausdruck (β') über in:

$$\frac{\omega_k e^{\omega_k}}{\sqrt[m]{\omega_k}},$$

oder es geht der Ausdruck (β) in:

$$\omega_{k+1}^{1-\frac{1}{m}} e^{\omega_{k+1}}$$

und der Ausdruck (β^1) in:

$$\omega_k^{1-\frac{1}{m}} e^{\omega_k}$$

über. Da man sowohl

$$\text{Lim}: \omega_{k+1}^{\lambda} = o \text{ als Lim}: \omega_k^{\lambda} = o$$

hat, wenn nur λ positiv ist, und da dieser Fall, wegen $m > 1$, hier wirklich Statt findet; so haben die Ausdrücke (β) und (β^1) unendlich klein werdende Grenzwerthe, und man ist zur Folgerung, die unbekannte Integralfunction der vorliegenden Differenzialformel gehöre von $x=a$ bis $x=b$ zu den continuirlichen, berechtiget.

Es bestehen somit, im vorliegenden Falle, die Gleichungen (6), (7) der Nr. 33, wie auch die Gleichung (8) der Nr. 36; wird in dieser Gleichung (8) $\alpha=o$ angenommen, so hat man, wenn $-a$ statt a gesetzt wird, die Gleichung:

$$\int_{-a}^{b} \frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}} = \int_{-a}^{o} \frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}} + \int_{o}^{b} \frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}}.$$

Behandelt man das erste Integrale rechts vom Gleichheitszeichen nach Gleichung (6) Nr. 33 und das zweite dieser Integralien nach der Gleichung (7) derselben Nr., oder legt man zur Bestimmung des ersten Integrals die Gleichung (9) und zu der des zweiten die Gleichung (10) Nr. 36 zu Grunde, so hat man:

$$\int_{-a}^{o} \frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}} = \omega \left\{ \frac{e^{-a}}{\sqrt[m]{-a}} + \frac{e^{-a+\omega}}{\sqrt[m]{-a+\omega}} + \frac{e^{-a+2\omega}}{\sqrt[m]{-a+2\omega}} + \ldots \frac{e^{-2\omega}}{\sqrt[m]{-2\omega}} + \frac{e^{-\omega}}{\sqrt[m]{-\omega}} \right\},$$

$$\int_{o}^{b} \frac{e^x dx}{\sqrt[m]{x}} = \omega' \left\{ \frac{e^{\omega'}}{\sqrt[m]{\omega'}} + \frac{e^{2\omega'}}{\sqrt[m]{2\omega'}} + \frac{e^{3\omega'}}{\sqrt[m]{3\omega'}} + \ldots \frac{e^{b-\omega'}}{\sqrt[m]{b-\omega'}} + \frac{e^{b}}{\sqrt[m]{b}} \right\},$$

wo ω und ω' beliebige, unendlich klein werdende, reelle Größen vorstellen, so daß man, wenn n und n' unendlich groß werdende, ganze und positive Zahlen bedeuten, die Gleichungen:

$$n\omega = a \quad \text{und} \quad n'\omega' = b,$$

hat. Nimmt man noch $\omega = \omega'$ an, so hat man:

$$\int_{-a}^{b} \frac{e^x}{\sqrt[m]{x}} dx = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-a}}{\sqrt[m]{-a}} + \frac{e^{-a+\omega}}{\sqrt[m]{-a+\omega}} + \frac{e^{-a+2\omega}}{\sqrt[m]{-a+2\omega}} + \ldots \frac{e^{-\omega}}{\sqrt[m]{-\omega}} \\ + \frac{e^{\omega}}{\sqrt[m]{\omega}} + \frac{e^{2\omega}}{\sqrt[m]{2\omega}} + \frac{e^{3\omega}}{\sqrt[m]{3\omega}} + \ldots \frac{e^{b-\omega}}{\sqrt[m]{b-\omega}} + \frac{e^{b}}{\sqrt[m]{b}} \end{array} \right\}.$$

IV. Hat man das Integrale

$$\int_{-a}^{b} \frac{e^x}{x} dx$$

vorgelegt, wo a und b positive, reelle Werthe haben, so hat man beim Nullwerden von x, wenn Alles in der in III gebrauchten Bedeutung auftritt, als Grenzwerthe für die Ausdrücke (β) und (β^1) folgende zwei Ausdrücke:

$$e^{\omega_{k+1}} \text{ und } e^{\omega_k} ,$$

welche beide die Einheit zur Grenze darbieten.

Es wird hiernach, wie aus den in Nr. 34 angestellten Betrachtungen hervorgeht, die unbekannte Integralfunction der Differenzialformel $\frac{e^x dx}{x}$ in der Nachbarschaft des Nullwerthes von x discontinuirlich sein: daher darf keines der im ersten Buche der Integralrechnung gefundenen Resultate auf den vorliegenden Fall irgendwie angewandt werden.

V. Hat man endlich die Differenzialformel $\frac{e^x}{x^m} dx$ zwischen den Grenzen $-a$ und $+b$ zum Integriren vorgelegt, wo $m > 1$ und a sowohl als b positive, reelle Größen vorstellen, dann ergiebt sich in der Nähe des Nullwerthes von x ein unendlich großwerdender Grenzwerth für jeden der Ausdrücke (β) und (β^1): daher darf auch in diesem Falle keines der Resultate des ersten Buches der Integralrechnung in Anwendung kommen.

106. In der Folge werden wir uns nur mit solchen bestimmten Integralien befassen, die denen in I, II, III der vorhergehenden Nr. aufgeführten ähnlich sind; jene bestimmten Integralien dagegen, die denen in IV und V der vorhergehenden Nr. aufgeführten ähnlich sind, werden wir gänzlich von unsern Betrachtungen ausschließen, und zwar aus dem ganz einfachen Grunde, daß man keines der in der Differenzialrechnung oder in der auf dieselbe basirten Integralrechnung gewonnenen Resultate auf einen solchen Fall anwenden darf.

Die bestimmten Integralien der letzten Art sind eben so wenig einer Auslegung oder Deutung fähig, als etwa die Ausdrücke:

$$\log.(-1)\ ,\quad \text{arc.Sin.a}\ ,\quad \text{u. d. m.}\ ,$$

wo $a > 1$ ist, welche letztere wenigstens auf untergeordnete Operationen oder Functionen zurückgebracht werden können, während die in Rede stehenden bestimmten Integralien nicht einmal dieses Vortheils theilhaftig sind. Man hat nämlich:

$$\log.(-1) = (2r+1)\pi\sqrt{-1}\ ,$$

wo r jede ganze reelle Zahl vorstellt, und

$$\text{arc.Sin.a} = (2r+1)\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\ ,$$

wo $a > 1$ und r eine beliebige ganze, reelle Zahl vorstellt: es reduciren sich hiernach die beim ersten Anblicke unerklärlichen Größen, wie $\log.(-1)$ und arc.Sin.a, wo $a > 1$ ist, auf das allerdings nicht ganz einleuchtende Symbol $\sqrt{-1}$, das doch wenigstens den analytischen Operationen unterzogen werden kann. Anders verhält sich aber die Sache mit den in Rede stehenden bestimmten Integralausdrücken, die nach dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft weder auf Symbole obiger Art reducirbar, noch viel weniger bekannten Begriffen bei- oder untergeordnet werden können.

107. Schließen wir nach der vorhergehenden Nr. alle jene Fälle, in denen $\varphi(x)dx$ im Bereiche der Integrationsgrenzen nicht unendlich klein wird, von unseren Betrachtungen aus, so besteht folgender, die Lehre der bestimmten Integralien betreffender Lehrsatz:

Wenn a und b reelle, nicht unendlich großwerdende Größen sind, so ist der Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

keines unendlich großwerdenden Werthes fähig, der, in mancher Beziehung, als invers zum Fundamentalsatz Nr. 16 der Differenzialrechnung angesehen werden kann.

Wir leiten den Beweis dieses Satzes, wie folgt, ein:

Wenn man die Gleichung:

$$\varphi(x)dx = d.F(x)\ ,$$

festsetzt, so hat man nach Gleichung (3) Nr. 32:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = F(b) - F(a),$$

welche Gleichung, nach dem Vorangeschickten, mit allen in der Integralrechnung I aufgestellten Gleichungen combinirt werden darf. Dieses vorausgesetzt, haben wir zur Begründung unseres Theorem's nur noch darzuthun, daß weder F(b) noch F(a) unendlich großwerdender Werthe fähig sind.

Daß es in der That sich so verhält, werden wir im Folgenden nachweisen.

Gesetzt man hätte:

$$F(a) = \infty,$$

so müßte auch, mit Beachtung der ersten der Gleichungen (α) Nr. 33 und mit Berücksichtigung des Umstandes, daß der Ausdruck $\omega_0\varphi(a)$ dieser Gleichung einen unendlich kleinwerdenden Werth hat, die Gleichung:

$$F(a+\omega_0) = \infty,$$

stattfinden; fände auch noch diese Gleichung Statt, so müßte, vermöge der zweiten der Gleichuugen (α) derselben citirten Nr., und wegen des unendlich kleinwerdenden Werthes von $\omega_1\varphi(a+\omega_0)$, auch folgende Gleichung:

$$F(a+\omega_0+\omega_1) = \infty,$$

noch Statt haben können; bestände auch noch diese Gleichung, dann würde die dritte der Gleichungen (α), aus dem Grunde, daß $\omega_2\varphi(a+\omega_0+\omega_1)$ einen unendlich kleinwerdenden Werth hat, auf folgende Gleichung:

$$F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2) = \infty,$$

führen; fährt man so fort, so muß man die sämmtlichen Gleichungen:

$$F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3) = \infty,$$

$$F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4) = \infty,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(a+\omega_0+\omega_1+\omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) = \infty,$$

als zugleich bestehend anerkennen, d. h., wenn man die Gleichung (5) Nr. 33 mit berücksichtiget, dann müßte die der Differenzialformel $\varphi(x)dx$ entsprechende Integralfunction F(x) für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$, wenn auch b und a um endliche Größen differiren, einen und denselben und zwar unendlich großwerdenden Werth annehmen; dieses ist aber dem in der Einleitung Nr. 6 aufgestellten

Begriffe einer Function gänzlich zuwider, daher ist auch die zuerst gemachte Annahme, F(a) sei eines unendlich großwerdenden Werthes fähig, unstatthaft oder unzuläßig.

Ganz auf gleichem Wege, mit Zuziehung der Gleichungen (α^1) Nr. 33, kann man die Unzuläßigkeit der Annahme: F(b) sei unendlich großwerdend, darthun; daher ist unsere vorige Behauptung „weder F(a) noch F(b) seien unendlich großwerdender Werthe fähig" gerechtfertiget, und mithin auch unser angekündigter Lehrsatz erwiesen.

108. Der in der vorhergehenden Nr. angekündigte Lehrsatz konnte nur unter der Beschränkung, daß die Integrationsgrenzen a und b nicht unendlich großwerdend sind, dargethan werden. Ist dagegen eine dieser Größen unendlich großwerdend, oder sind es beide zugleich, welche aber alsdann mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sein werden, dann kann allerdings, wenn gleich die Differenzialformel $\varphi(x)dx$ im ganzen Bereiche der Integrationsgrenzen unendlich kleinwerdend verbleibt, das bestimmte Integrale einen unendlich großwerdenden Werth annehmen; denn der in der vorhergehenden Nr. geführte Beweis stützt sich einzig darauf, daß es keine Function einer allgemeinen Größe geben kann, welche im Bereiche zweier ungleichen, nicht unendlich großwerdenden Werthe der allgemeinen Größe beständig einen und denselben Werth beibehält; diese Stütze fällt aber sogleich weg, wenn nur wenigstens eine dieser Integrationsgrenzen, z. B. die obere b unendlich großwerdend vorausgesetzt wird; denn wenn sich die allgemeine Größe einer Function im Zustande des unendlichen Großwerdens befindet, legt die Function, falls sie noch in diesem Zustande den Character der Continuität beibehält, (wie wir in Nr. 115 darthun werden), die Eigenschaft ab, mit der Aenderung der allgemeinen Größe sich ebenfalls zu ändern, und kann beständig unendlich groß- oder unendlich kleinwerdend verbleiben, oder gar gegen ein und denselben endlichen Werth convergiren.

Zur Rechtfertigung dieser Behauptung führen wir einstweilen folgende Functionen an:

$$e^{x^2}\,,\quad \log.(1+x^2)\,,\quad \frac{1}{x}\,,\quad e^{m-\frac{1}{x}}\,.$$

Wenn in den zwei ersten der hier aufgeführten Functionen die

allgemeine Größe x den Zustand des unendlichen Großwerdens erreicht hat, bleiben dieselben beständig unendlich groß, die dritte dieser Functionen bleibt dann beständig unendlich klein, die vierte nähert sich alsdann ohne Ende dem Werthe von e^m und ist endlich, wenn m keine unendlich großwerdende Größe vorstellt.

Es kann also das bestimmte Integrale:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\;,$$

wenn wenigstens eine der Integrationsgrenzen unendlich großwerdend ist, obschon die Differenzialformel $\varphi(x)dx$ von $x=a$ bis $x=b$ (Nr. 105 II und III) unendlich kleinwerdend verbleibt, dennoch einen unendlich großwerdenden Werth annehmen. In den nächstfolgenden fünf Nrn. werden wir einige Sätze mittheilen, die die Beantwortung der Frage: ob ein solches bestimmte Integrale eines endlichen Werthes fähig sei oder nicht, in vielen Fällen erleichtern werden. In jenen Fällen, in denen diese Frage verneinend entschieden werden kann, d. h., wenn das vorgelegte Integrale keines endlichen Werthes fähig ist, dann ist man auch des beschwerlichen Geschäftes der Integration überhoben; man erspart entweder das Aufsuchen der unbestimmten Integralfunction, oder man umgeht die lästige, wenigstens doch immer ausführbare numerische Bestimmung einer der Reihen (6), (7), (9), (10), (11) aus Kapitel I der Integralrechnung, die zuletzt sämmtlich doch nur auf unendlich großwerdende Werthe führen müssen.

109. Durch die Analogie, die zwischen ohne Ende fortlaufenden Gliederreihen und den mit unendlich großwerdenden Grenzen versehenen bestimmten Integralien Statt findet, geleitet, werden wir, gleich wie diese Reihen, auch diese bestimmten Integralien in convergente und divergente abtheilen. Wir werden sonach so ein bestimmtes Integrale convergirend oder convergent nennen, wenn dessen Werth endlich oder unendlich kleinwerdend ist; bietet dagegen solch ein bestimmtes Integrale einen unendlich großwerdenden Werth dar, so werden wir es divergirend oder divergent nennen.

Dieses vorausgesetzt, besteht nun folgender, die Convergenz und Divergenz bestimmter Integralien betreffender Lehrsatz:

Stellt $\varphi(x)$ eine Function der allgemeinen Größe x

vor, die erstens beim unendlichen Zunehmen der allgemeinen Größe unendlich klein wird, zweitens für keinen der Werthe von $x=a$ bis $x=\infty$ unendlich groß wird, wo a irgend eine endliche, reelle Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt und behält drittens diese Function, innerhalb derselben Grenzen der allgemeinen Größe, ein und dasselbe Zeichen bei, so ist das bestimmte Ingrale:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

convergirend, wenn die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$k_1\varphi(a)+(k_2-k_1)\varphi(a+k_1)+(k_3-k_2)\varphi(a+k_2)+(k_4-k_3)\varphi(a+k_3)+\ldots \quad (A)$$

zu den convergenten gehört, divergirend hingegen, wenn die folgende unendliche Gliederreihe:

$$k_1\varphi(a+k_1)+(k_2-k_1)\varphi(a+k_2)+(k_3-k_2)\varphi(a+k_3)+\ldots\ldots \quad (B)$$

den divergenten angehört, wo die Größen k_1, k_2, k_3, .. reelle, positive, um endliche Differenzen abstehende und ins Unendliche wachsende Werthe vorstellen.

Bei der Beweisführung dieses Satzes gewinnen wir an Deutlichkeit, wenn wir zuerst den folgenden einfacheren Fall begründen.

I. Die Function $\varphi(x)$ nimmt beim Uebergange der allgemeinen Größe x von $x=a$ bis $x=\infty$ immerwährend ab, und geht zuletzt in den Zustand des unendlichen Abnehmens über.

Zu diesem Zwecke stelle k_n eine der obigen Größen k_1, k_2, k_3, .. die dem Zeiger n entspricht, dar, so giebt die Gleichung (8) Nr. 36 folgende Gleichung:

$$\int_a^{a+k_n}\varphi(x)dx = \int_a^{a+k_1}\varphi(x)dx + \int_{a+k_1}^{a+k_2}\varphi(x)dx + \int_{a+k_2}^{a+k_3}\varphi(x)dx + \ldots \int_{a+k_{n-1}}^{a+k_n}\varphi(x)dx. \quad (\alpha)$$

Ferner giebt die Gleichung (9) derselben angeführten Nr.:

$$\int_a^{a+k_1}\varphi(x)dx = \omega\left\{\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots\varphi[a+(m-1)\omega]\right\}, \quad (\beta)$$

wo ω eine unendlich klein- und m eine unendlich großwerdende Größe vorstellt, deren Product die Gleichung:

$$m\,\omega = k_1$$

darbietet. Bedenkt man nun, daß nach der vorliegenden Annahme die innerhalb der Klammern befindlichen Glieder dieser Gleichung,

wenn dieselben von der Linken zur Rechten gezählt werden, beständig abnehmen, nämlich daß man:

$$\varphi(a) > \varphi(a+\omega) > \varphi(a+2\omega) > \ldots \ \varphi[a+(m-1)\omega] > \varphi(a+m\omega) \quad (\gamma)$$

hat, so erhält man sofort folgende Ungleichheit:

$$\int_a^{a+k_1} \varphi(x)dx < m\omega\varphi(a) ,$$

oder auch folgende:

$$\int_a^{a+k_1} \varphi(x)dx < k_1\varphi(a) .$$

Diese Ungleichheit wird, als solche, nicht gestört, wenn zuerst k_1 in $k_2 - k_1$ und hierauf a in $a+k_1$ umgesetzt wird. Vollzieht man diese Umsetzung, so ergiebt sich auch folgende Ungleichheit:

$$\int_{a+k_1}^{a+k_2} (x)dx < (k_2-k_1)\varphi(a+k_1) .$$

Vertauscht man hier k_1 in k_2 und k_2 in k_3, so hat man noch immer:

$$\int_{a+k_2}^{a+k_3} \varphi(x)dx < (k_3-k_2)\,\varphi(a+k_2) .$$

Wird hier k_2 in k_3 und k_3 in k_4 umgetauscht, so ist auch noch:

$$\int_{a+k_3}^{a+k_4} \varphi(x)dx < (k_4-k_3)\,\varphi(a+k_3) .$$

Wird in dieser Weise fortgefahren, so gelangt man endlich zur Ungleichheit:

$$\int_{a+k_{n-1}}^{a+k_n} \varphi(x)dx < (k_n-k_{n-1})\varphi(a+k_{n-1}) .$$

Werden diese Ungleichheiten addirt, so erhält man mit Beachtung der Gleichung (α), folgende Ungleichheit:

$$\int_a^{a+k_n} \varphi(x)dx < k_1\varphi(a)+(k_2-k_1)\varphi(a+k_1) + \ldots (k_n-k_{n-1})\varphi(a+k_{n-1}) . \quad (\delta)$$

Die Gleichung (β) mit den Ungleichheiten in (γ) verglichen, führt auch auf folgende Ungleichheit:

$$\int_a^{a+k_1} \varphi(x)dx > m\omega\varphi(a+m\omega) ,$$

oder auch:

$$\int_a^{a+k_1} (x)dx > k_1\varphi(a+k_1) .$$

Geht hier k_1 in $k_2 - k_1$ und nachher a in $a+k_1$ über, so hat man auch:

$$\int_{a+k_1}^{a+k_2} \varphi(x)dx > (k_2-k_1)\varphi(a+k_2) .$$

Vertauscht man hier k_1 in k_2 und k_2 in k_3, so hat man:

$$\int_{a+k_2}^{a+k_3} \varphi(x)dx > (k_3-k_2)\varphi(a+k_3) .$$

Wenn in dieser Weise fortgefahren, und hierauf die Summe aller so erhaltenen Ungleichheiten genommen wird, ergiebt sich folgende Ungleichheit:

$$\int_{a}^{a+k_n} \varphi(x)dx > k_1\varphi(a+k_1)+(k_2-k_1)\varphi(a+k_2)+\ldots(k_n-k_{n-1})\varphi(a+k_n). \quad (\varepsilon)$$

Wird nun k_n als eine unendlich großwerdende, positive, reelle Größe angesehen, so daß die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \varphi(a+k_n) = 0$$

Bestand hat, dann zeugen die Ungleichheiten (δ) und (ε) von der Richtigkeit unseres angekündigten Lehrsatzes unter der in I ausgesprochenen Beschränkung.

II. Wenn die Function $\varphi(x)$, beim Uebergange von $x=a$ bis $x=\infty$, mehrere Wechsel des Zu- und Abnehmens eingeht, bevor dieselbe in den Zustand des immerwährenden Abnehmens tritt, so wird das angekündigte Theorem, wie folgt, erwiesen:

Wird durch b jener Werth von x bezeichnet, der größer als a ist, (so daß $b-a$ eine positive Größe vorstellt), und beim Uebergange der Function $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=\infty$ derselben zum letzten Male einen Maximumwerth beilegt, so wird vermöge der Voraussetzung, daß die Function $\varphi(x)$ erst für $x=\infty$ ohne Ende abnimmt, diese Größe b offenbar noch einen endlichen Werth haben; setzt man nun

$$b = a + k_g ,$$

so wird auch k_g eine endliche, positive Größe darstellen und wird, vermöge der Willkührlichkeit der Größen:

$$k_1 , \; k_2 , \; k_3 , \; k_4 , \; \ldots\ldots \; k_n ,$$

als eine dieser Größen, die noch einem endlichen Zeiger g entspricht, angesehen werden dürfen.

Dieses vorausgesetzt, wird man durch analoge Schlüsse wie in I auf folgende Ungleichheiten:

$$\int_b^{\infty}\varphi(x)dx < k_{g+1}\varphi(a+k_g)+(k_{g+2}-k_{g+1})\varphi(a+k_{g+1})$$
$$+(k_{g+3}-k_{g+2})\varphi(a+k_{g+2}) + \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

$$\int_b^\infty \varphi(x)dx > k_{g+1}\varphi(a+k_{g+1})+(k_{g+2}-k_{g+1})\varphi(a+k_{g+2}) + (k_{g+3}-k_{g+2})\varphi(a+k_{g+3}) + \ldots\ldots\ldots \quad (\eta)$$

geführt.

Wird nun die ohne Ende fortlaufende Reihe (A) zu den convergenten gezählt, so convergirt um so mehr die erste der zuletzt aufgestellten, ohne Ende fortlaufenden Reihen, also wird um so mehr, unter derselben Voraussetzung, das bestimmte Integrale:

$$\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

ein convergentes sein. Nun ist:

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^\infty \varphi(x)dx\,,$$

und das bestimmte Integrale $\int_a^b \varphi(x)dx$ hat nach dem in Nr. (107) erwiesenen Lehrsatze keinen unendlich großwerdenden Werth, daher ist auch unter der Voraussetzung: die Reihe (A) sei convergent, das bestimmte Integrale:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

ein convergentes.

Wird ferner die ohne Ende fortlaufende Reihe (B) zu den divergenten gezählt, so gilt ein Gleiches von der unendlichen Reihe in der Ungleichheit (η); denn der Unterschied dieser beiden unendlichen Gliederreihen ist die Summe der folgenden:

$$k_1\varphi(a+k_1)+(k_2-k_1)\varphi(a+k_2) + \ldots (k_g - k_{g-1})\varphi(a+k_g) - k_g\varphi(a+k_{g+1})\,,$$

aus einer endlichen Gliederzahl zusammengesetzten Reihe, die offenbar, da jedes Glied derselben einen endlichen Werth hat, einen endlichen Werth darbietet. Wenn also die unendliche Gliederreihe (B) divergirt, so findet dieses, vermöge der Ungleichheit (η), um so mehr vom bestimmten Integrale:

$$\int_b^\infty \varphi(x)dx \quad \text{also noch mehr von} \quad \int_a^\infty \varphi(x)\,dx\,,$$

Statt, w. z. b. w.

Das umgekehrte dieses Theorems besteht auch noch, wenn man nur die unendlichen Gliederreihen (A) und (B) unter einander vertauscht. Es lautet dieser umgekehrte Satz, wie folgt:

Wenn die Function $\varphi(x)$ dieselbe, wie im angekündigten Lehrsatze vorausgesetzt bleibt, so ist die ohne

Ende fortlaufende Reihe (A) eine divergente, wenn das bestimmte Integrale:

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

zu den divergenten gehört; hingegen convergirt die ohne Ende fortlaufende Reihe (B), wenn dasselbe Integrale ein convergentes ist. Die Richtigkeit dieses umgekehrten Satzes leuchtet unmittelbar aus den aufgestellten Ungleichheiten (δ), (ε), (ζ) und (η) ein.

110. Die zwei unendlichen Gliederreihen (A) und (B) der vorangehenden Nr. fallen, was die Frage über Convergenz und Divergenz betrifft, in eine zusammen, wenn die Größen:

$$k_1\,,\quad k_2\,,\quad k_3\,,\quad k_4\,,\quad k_5\,,\quad \ldots\ldots$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, oder eine sogenannte arithmetische Progession bilden.

In der That, setzt man:

$$k_1 = h\,,\quad k_2 = 2h\,,\quad k_3 = 3h\,,\quad k_4 = 4h\,,\quad \ldots\ldots$$

so gelangt man, mit Zuziehung der Ungleichheiten (δ), (ε), (ζ), (η) der vorangehenden Nr., auf folgende zwei Ungleichheiten:

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx < h\varphi(a)+h\varphi(a+h)+h\varphi(a+2h)+h\varphi(a+3h)+\ldots\,,$$

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx > h\varphi(a+h)+h\varphi(a+2h)+h\varphi(a+3h)+h\varphi(a+4h)+\ldots\,,$$

welche Statt haben, die Function $\varphi(x)$ mag von $x=a$ bis $x=\infty$ beständig abnehmen, oder mehrere Abwechselungen im Wachsen und Abnehmen eingehen, wenn dieselbe zuletzt nur ohne Ende abnimmt. Es besteht daher diesen Ungleichheiten zu Folge auch folgender, für die Anwendung mehr geeignete Lehrsatz:

Wenn $\varphi(x)$ wie im angekündigten Lehrsatze der vorangehenden Nr. verbleibt, und wenn $\varphi(a)$ keinen unendlich großwerdenden Werth annimmt, so convergirt oder divergirt das bestimmte Integrale:

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx\,,$$

je nachdem die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\varphi(a+3h)+\ldots\ldots,$$

zu den convergenten oder divergenten gehört, und umgekehrt.

111. In den Sätzen der beiden vorangehenden Nrn. setzten wir beständig voraus: die Function $\varphi(x)$ nehme für keinen Werth von $x=a$ bis $x=\infty$ einen unendlich großwerdenden Werth an; in jenen Fällen, in denen das Gegentheil hiervon Statt findet, in denen aber die Ausdrücke (β) oder (β^1) Nr. 34. auf die Continuität der Integralfunction innerhalb derselben Grenzen a und ∞ hinweisen, wird diese Schwierigkeit durch ein Zerlegen des vorgelegten Integrals in eine Summe zweier Integralien, nach Gleichung (8) Nr. 36, umgangen. Ist nämlich b größer a und von der Beschaffenheit, daß $\varphi(x)$ von $x=b$ bis $x=\infty$ nie unendlich groß wird, so hat man, nach der so eben angeführten Gleichung,

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^\infty \varphi(x)dx ;$$

und da das bestimmte Integrale $\int_a^b \varphi(x)dx$ nach Nr. 107 keinen unendlich großwerdenden annehmen kann, so bleibt noch das bestimmte Integrale $\int_b^\infty \varphi(x)dx$ in Rücksicht auf Convergenz und Divergenz zu untersuchen übrig, was, nach der getroffenen Annahme über b, mittelst der in den vorangehenden zwei Nrn. aufgestellten Sätzen nunmehr möglich ist.

112. Wir setzten ferner in den vorangehenden Nrn. die Größe a oder die untere Integrationsgrenze als endliche Größe, Null mitbegriffen, voraus; stellt aber a eine unendlich großwerdende negative Größe vor, dann kann man das Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ durch die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^\infty \varphi(x)dx ,$$

als Summe zweier Integralien geben; das zweite dieser durch Zerlegung gewonnenen Integralien rechter Hand vom Gleichheitszeichen kann, in Bezug auf Convergenz und Divergenz, nach den in den vorhergehenden Nrn. entwickelten Sätzen untersucht werden; das erste dieser Integralien betreffend, bedenke man Folgendes:

Wenn man

$$\int \varphi(x)dx = F(x) + \text{Const.}$$

annimmt, so hat man nach der Ableitungsmethode (Integralrechnung II. Nr. 41), wenn x in $-x$ umgesetzt wird,

$$\int \varphi(-x)dx = -F(-x) + \text{Const.} ;$$

diese zwei Gleichungen geben nach Gleichung (3) Nr. 32:

$$\int_{-\infty}^{o} \varphi(x)dx = F(o) - F(-\infty) ,$$

$$\int_{o}^{\infty} \varphi(-x)dx = -F(-\infty) + F(o) ,$$

aus welchen

$$\int_{-\infty}^{o} \varphi(x)dx = \int_{o}^{\infty} \varphi(-x)dx ,$$

gezogen wird, daher hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{o}^{\infty} [\varphi(x) + \varphi(-x)]dx ,$$

wodurch auch der vorliegende Fall auf den in Nr. (109) angeführten zurückgebracht erscheint.

113. Endlich setzten wir bis jetzt in der zu integrirenden Differenzialformel $\varphi(x)dx$ die Function $\varphi(x)$, von $x = a$ angefangen, bis $x = \infty$ fortgesetzt, beständig mit einem und demselben Zeichen begabt voraus. Findet auch diese Voraussetzung nicht Statt, sondern ändert im Gegentheile diese Function $\varphi(x)$ beim Uebergange von $x = a$ bis $x = \infty$ ein oder mehrere Male den Zeichenzustand; so sei b größer als a und endlich, und stelle jenen Werth von x vor, von dem angefangen, beim beständigen Zunehmen dieser allgemeinen Größe, die Function $\varphi(x)$ keine Zeichenänderung mehr erleidet; zerlegt man alsdann das vorgelegte bestimmte Integrale in Theilintegralien nach Gleichung (8) Nr. 36, so kann auch dieser Fall nach dem allgemeinen Theoreme in Rücksicht auf Convergenz und Divergenz untersucht werden.

Blos für den Fall, wenn b unendlich großwerdend ist, d. h., wenn die Function $\varphi(x)$ von $x = a$ bis $x = b = \infty$ eine unbestimmte und unendliche Anzahl von Zeichenabwechselungen eingeht, läßt sich keine allgemeine Regel, in Rücksicht auf Convergenz und Divergenz, aus den bis jetzt aufgestellten Sätzen gewinnen.

114. Soll das über Convergenz und Divergenz Mitgetheilte auch Anwendung finden, dann muß noch Einiges über Convergenz und Divergenz unendlicher Gliederreihen mitgetheilt werden. Ehe wir uns jedoch an dieses Geschäft machen, wird es gut sein, zuerst die Beschaffenheit der Reihen festzustellen, über die unsere Untersuchungen sich erstrecken werden.

Wenn man die Glieder einer ohne Ende fortlaufenden Reihe durch:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots \qquad (A)$$

vorstellt, so werden wir, wie es der von uns beabsichtigte Zweck erfordert, die Glieder dieser Reihe folgendermaßen feststellen.

a) Von irgend einem Gliede u_r angefangen, das einem noch so großen, jedoch endlichen Zeiger r entspricht, nehmen die Folgeglieder beständig ab, so daß das dem unendlich groswerdenden Zeiger n entsprechende Glied einem unendlich kleinwerdenden Werthe sich nähert.

b) Von einem mit derselben Eigenschaft begabten Gliede u_r angefangen, behalten alle Folgeglieder ein und dasselbe Zeichen bei, welches wir der Einfachheit wegen positiv voraussetzen.

Dieses vorausgesetzt, legen wir uns eine zweite, mit denselben Eigenschaften begabte, ohne Ende fortlaufende Gliederreihe:

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_n,\ v_{n+1},\ \ldots \qquad (B)$$

vor; so läßt sich zuerst folgender allgemeine Satz aufstellen:

Wenn der Zeiger r in der so eben festgestellten Bedeutung in beiden Reihen (A) und (B) auftritt, und es wird die Reihe (B) zu den convergenten gezählt, so ist auch die Reihe (A) eine convergente, wenn die Ungleichheit:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty$$

stattfindet; zählt man hingegen die Reihe (B) zu den divergenten, so ist auch die Reihe (A) eine divergente, wenn man folgende Ungleichheit:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty$$

hat: oder je nachdem der Unterschied

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty$$

negativ oder positiv ist, hängt die Convergenz der Reihe (A) von der Convergenz der Reihe (B) oder die Divergenz der Reihe (A) von der Divergenz der Reihe (B) ab.

Wir wollen blos den ersten Theil dieses Satzes feststellen, da dann der zweite Theil durch eine Umkehrung der Schlüsse sehr leicht gefolgert werden kann.

Nach der Voraussetzung hat man:

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < \frac{v_{r+1}}{v_r};$$

erhöhet man den Zeiger r um eine Einheit, so hat man auch:

$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < \frac{v_{r+2}}{v_{r+1}};$$

multiplicirt man diese zwei Ungleichheiten mit einander, dann besteht auch noch folgende Ungleichheit:

$$\frac{u_{r+2}}{u_r} < \frac{v_{r+2}}{v_r}.$$

Auf gleichem Wege findet man folgende Ungleichheiten:

$$\frac{u_{r+3}}{u_r} < \frac{v_{r+3}}{v_r}, \quad \frac{u_{r+4}}{u_r} < \frac{v_{r+4}}{v_r}, \quad \frac{u_{r+5}}{u_r} < \frac{v_{r+5}}{v_r}, \ldots$$

und wenn alle diese Ungleichheiten addirt werden, erhält man:

$$\frac{1}{u_r}(u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \ldots) < \frac{1}{v_r}(v_{r+1} + v_{r+2} + v_{r+3} + \ldots),$$

oder auch:

$$u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \ldots < \frac{u_r}{v_r}(v_{r+1} + v_{r+2} + v_{r+3} + \ldots).$$

Da u_r sowohl als v_r, vermöge des endlichen Werthes von r, noch endliche Werthe haben, so ist der Quotient $\frac{u_r}{v_r}$ ebenfalls noch endlich: convergirt daher die Reihe (B), so muß um so mehr, vermöge der letzten Ungleichheit, die Reihe (A) convergiren, w. z. b. w.

Dieser Satz kann noch bedeutend vereinfacht werden, wenn wir erst die in den zwei zunächst folgenden Nrn. vorkommenden Sätze begründet haben werden.

115. **Wenn eine Function einer allgemeinen Größe beim unbestimmten, unendlichen Wachsen dieser allgemeinen Größe die Eigenschaft der Continuität beibehält, so ist der Werth dieser Function, für diesen Zustand der allgemeinen Größe, an eine bestimmte, unveränderliche Grenze gebunden; oder es behält diese Function immer denselben Werth bei, wie auch immer die allgemeine Größe, wenn solche nur nicht den unendlich großwerdenden Zustand verläßt, verändert werden mag.**

Wir haben bereits in Nr. 108 einige Functionen aufgeführt,

die von der Richtigkeit dieses Satzes zeugen; daß aber derselbe in seiner ganzen Allgemeinheit bestehe, wollen wir in Folgendem darzuthun suchen.

Wenn eine Function einer allgemeinen Größe x in der Nachbarschaft eines nicht unendlich großwerdenden Werthes a von x continuirlich ist, so erleidet dieselbe, wenn a nur eine unendlich kleinwerdende Aenderung erfährt, ebenfalls nur eine unendlich kleinwerdende Aenderung (Einleitung Nr. 14). Der Grenzwerth der Function in der nächsten Umgebung dieses Werthes a von x ist der, den die Function für $x = a$ selbst annimmt; oder die Function ist in der nächsten Nähe des a Werthes von x an eine bestimmte, unveränderliche Grenze gebunden. Wird nun diese Function von x durch $f(x)$ vorgestellt, so besteht die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: f(a+\omega) = f(a) \,,$$

wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Abnehmen von ω Bezug hat, und wo a was immer für einen endlichen Werth, Null mitbegriffen, vorstellt. Diese Gleichung bestehet nicht nur in der hier aufgestellten Form, sondern auch dann noch, wenn an die Stelle von ω irgend eine Function von ω, die mit ω zugleich verschwindet, substituirt wird. So ist man statt ω eine der folgenden Functionen:

$$\alpha\omega + \beta\omega^2 \,, \quad \alpha \log.(1-\omega) \,, \quad \alpha\omega + \beta \,\text{Sin.}\omega \quad \text{u. d. m.}$$

in die obige Gleichung zu setzen berechtiget, wo α und β endliche Werthe haben, wenn nur die Function f in der nächsten Umgebung des Werthes a von x continuirlich ist.

Dieses zugegeben, wird, wenn $F(x)$ eine Function von x darstellt, die im Zustande des unendlichen Wachsens von x continuirlich ist, die Function $F(\frac{1}{x})$, die durch $f(x)$ vorgestellt sein mag, in der nächsten Umgebung des Nullwerthes von x gleichfalls continuirlich sein, und man wird, nach dem Vorangeschickten, folgende Grenzgleichung haben:

$$\text{Lim}: f(\omega) = f(o) \,,$$

in der $f(o)$ einen bestimmten und unveränderlichen Werth darstellt, man mag für ω was immer für eine Function von ω, die mit ω zugleich verschwindet, setzen.

Nun ist:

$$f(\omega) = F\left(\frac{1}{\omega}\right) = F(n) \,,$$

wo n den reciproken Werth von ω oder eine unendlich großwerdende Größe bedeutet; daher hat man, wenn das Grenzzeichen Lim: auf

das unendliche Wachsen von n bezogen wird, auch folgende Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: F(n) = f(o) \,,$$

in der man statt n jede Function von n, die zugleich mit n unendlich wächst, zu setzen berechtiget ist; woraus die Richtigkeit des angekündigten Lehrsatzes hervorgeht.

Anmerkung. Die Functionen von x, wie Sin.x und Cos.x, scheinen beim ersten Anblicke im Widerspruche mit diesem Satze zu stehen. — Allerdings hat man:

$$\text{Lim}: \text{Sin.}x = \tfrac{0}{0} \,, \quad \text{Lim}: \text{Cos.}x = \tfrac{0}{0} \,,$$

wo das Grenzzeichen auf das unbestimmte, unendliche Wachsen von x bezogen wird, jedoch nur dann, wenn der Kreis bei der Erklärung dieser Functionen zur Grundlage dient; betrachtet man aber, wie solches in der Einleitung Nr. 9 geschah, die Function $e^{x\sqrt{-1}}$ als Entstehungsquelle dieser Functionen, so ergiebt sich, wie im Verfolge dieses Kapitels Nr. 151 gezeigt werden soll, wenn x unbestimmt und ins Unendliche wächst, Null als Grenzwerth einer jeden der Functionen Sin.x und Cos.x.

116. Mit Zuziehung des so eben festgestellten Satzes, können wir auch den folgenden begründen:

Wenn eine Function von x, wie F(x) der vorangehenden Nr., von irgend einem endlichen Werthe von x, der durch h vorgestellt sein mag, angefangen und bis ins Unendliche fortgesetzt, die Eigenschaft der Continuität beibehält; und wenn solche, beim unendlichen Wachsen der allgemeinen Größe, einem von Null verschiedenen Werthe sich nähert; dann giebt es auch einen endlichen, übrigens noch so großen Werth von x, den wir r nennen wollen und der $\geqq$h ist, von dem angefangen, sämmtliche, verschiedene Werthe der Function, die beim Uebergange von $x = r$ bis $x = \infty$ entstehen, mit einem und demselben Zeichen behaftet sind: so daß das Zeichen des Functionwerthes beim unendlichen Wachsen von x dasselbe ist, als das der verschiedenen Functionwerthe, wenn x alle Werthe von $x = r$ bis $x = \infty$ durchgeht.

Da die Function F(x) beim Uebergange von $x = h$ bis $x = \infty$ Zeichenänderungen eingehen kann oder nicht, und da die letztere Annahme keiner weiteren Erörterung bedarf, so haben wir bei der

Begründung des angekündigten Satzes nur das Statthaben der ersten Annahme zu berücksichtigen.

Es gehe also die Function F(x) beim Uebergange von $x = h$ bis $x = \infty$ eine oder mehrere Zeichenänderungen ein. Da die Function für alle diese zwischen h und ∞ fallenden Werthe der allgemeinen Größe beständig continuirlich verbleibt, so kann ein Uebergang der Function von einem Zeichenzustande in den andern, nur für einen solchen zwischen h und ∞ fallenden Werth von x statthaben, der die Function auf Null bringt. Wäre es nun möglich, daß ein solcher Uebergangsmoment des Zeichenzustandes der Function einem unendlich großwerdenden Werthe der allgemeinen Größe entspräche, so müßte, nach dem so eben Gesagten, für diesen Werth der allgemeinen Größe Null als Grenzwerth der Function sich herausstellen, welchen Nullwerth, nach dem Satze der vorhergehenden Nr., diese Function für jeden unendlich großwerdenden Werth der allgemeinen Größe beibehalten müßte. Dieses ist aber gegen die Voraussetzung; daher kann es keinen unendlich wachsenden Werth der allgemeinen Größe geben, der die Function F(x) auf Null bringt, sondern der größte, zwischen h und ∞ fallende Werth von x, der diese Function noch auf Null bringt, ist eine endliche Größe. Wird diese endliche Größe durch r dargestellt, so nimmt die Function, von $x = r$ angefangen, bis $x = \infty$ fortgesetzt, beständig Werthe an, die von Null verschieden sind, und kann, vermöge ihrer Continuität innerhalb derselben Grenzwerthe von x, keine Zeichenänderung mehr eingehen: Es existirt sonach ein endlicher Werth von x, denn wir r nannten, von dem aus aufwärts gezählt, alle Functionwerthe dasselbe Zeichen haben, als der Grenzwerth der Function beim unendlichen Wachsen der allgemeinen Größe trägt. w. z. b. w.

117. Nunmehr sind wir in der Lage, dem in Nr. 114 aufgestellten Satze, betreffend die Convergenz und Divergenz der Reihen, eine viel einfachere und für die Anwendung geeignetere Form zu geben.

Wenn hier Alles in der Bedeutung der citirten Nr. auftritt, so kann man den Unterschied:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{v_{k+1}}{v_k},$$

als eine vom Stellenzeiger k abhängige Größe oder als eine Function von k betrachten. Für unsern Zweck, aus der Convergenz oder

Divergenz unendlicher Reihen, auf die Convergenz oder Divergenz bestimmter Integralien zu schließen, muß das dem Stellenzeiger k entsprechende Glied der zur Untersuchung tauglichen, unendlichen Reihe, wie aus den Sätzen der Nrn. 109, 110, ꝛc. hervorgeht, eine continuirliche Function von k sein, und zwar, von irgend einem endlichen Werthe von k angefangen, durch alle folgenden größeren Werthe bis zum unendlichen Großwerden von k eine continuirliche Function verbleiben: daher können wir auch den obigen Unterschied, als continuirliche Function von k voraussetzen. Gehen wir somit von dieser Annahme in allen unsern folgenden Untersuchungen aus, so können wir zunächst folgenden Satz aufstellen:

Wenn die Reihe (B) Nr. 114 zu den convergenten gehört, so gehört auch die Reihe (A) derselben Nr. zu den convergenten, wenn der Unterschied:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{v_{k+1}}{v_k}, \qquad (\alpha)$$

beim unendlichen Wachsen von k einen angebbaren, negativen Werth darbietet; wird hingegen diese Reihe (B) zu den divergenten gezählt, so ist auch die Reihe (A) eine divergente, wenn derselbe Unterschied im gleichen Zustande der Größe k einen angebbaren, positiven Werth darbietet.

Wir wollen uns auch hier, gleich wie in der citirten Nr., nur mit der Beweisführung des ersten Theiles dieses Satzes befassen.

Wenn der Unterschied (α) beim unendlichen Zunehmen von k an einen negativen, angebbaren Grenzwerth gebunden ist, dann giebt es, nach dem in der vorangehenden Nr. bewiesenen Lehrsatze, auch eine endliche Größe r, so daß der Unterschied:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty,$$

beständig negativ bleibt; wenn sonach die Reihe (B) convergirend ist, dann ist es auch die Reihe (A) (Nr. 114). w. z. b. w.

118. Um Folgerungen aus dem so eben aufgestellten Satze ziehen zu können, wird es gut sein, zuerst eine bestimmte, ohne Ende fortlaufende Reihe in Bezug auf Convergenz und Divergenz zu untersuchen, um dann, durch Vergleichung anderer Reihen mit derselben,

auch über diese in gleicher Beziehung etwas Bestimmtes aussprechen zu können.

Legen wir uns, zu diesem Zwecke, die sogenannte geometrische Progression mit dem beständigen Quotienten a in Rücksicht auf Convergenz und Divergenz zur Untersuchung vor.

Nimmt man, der Einfachheit wegen, die Einheit als erstes Glied dieser Progession an, so handelt es sich, zu untersuchen, in welchen Fällen die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \dots \tag{I}$$

zu den convergenten und in welchen dieselbe zu den divergenten gehöre.

Erklärt man a als positive Größe, so ergiebt sich beim bloßen Anblicke dieser Reihe, daß dieselbe zu den divergenten gehören muß, wenn man $a \geqq 1$ hat.

Um den Fall, wenn man a positiv und kleiner als 1 hat, beurtheilen zu können, bezeichne man die Summe der k ersten Glieder derselben durch S_k, so hat man:

$$S_k = \frac{a^k - 1}{a - 1}.$$

Wird nun k in den Zustand des unendlichen Wachsens versetzt, und bezeichnet man dann durch S den Grenzwerth von S_k, so hat man, da unter der getroffenen Annahme über a das Glied a^k Null als Grenzwerth darbietet, die Gleichung:

$$S = \frac{1}{1 - a},$$

woraus hervorgeht, daß die vorgelegte Reihe (I), bei der Annahme $a < 1$, da ihre Summe endlich ist, zu den convergenten zu zählen sei.

Dasselbe Ergebniß wird auch auf folgendem Wege erzielt:

Nach der Fundamentalgleichung (II) Nr. 38 hat man:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log.a} + \text{Const.}$$

Die nach dem Integralzeichen vorkommende Function von x, die Function a^x, nimmt bei der Annahme $a < 1$ immerwährend ab, falls x alle Werthe von o bis ∞ durchgeht, und geht bei $x = \infty$ in Null über; ferner bietet dieselbe Function, wenn statt x nach und nach die Werthe:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots .$$

gesetzt werden, die obige, zur Untersuchung vorgelegte Reihe (I) dar: daher wird, nach dem in Nr. 110 aufgestellten Satze, diese Reihe zu den convergenten oder divergenten gehören, je nachdem das bestimmte Integrale $\int_0^\infty a^x\,dx$ zu den convergenten oder divergenten gezählt wird. Es giebt aber die oben aufgestellte Integralgleichung, wennn man die Gleichung (3) Nr. 32 berücksichtiget, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty a^x\,dx = -\frac{1}{\log.a},$$

aus welcher ein endlicher Werth für das in Rede stehende bestimmte Integrale ersichtlich ist, also ist dieses bestimmte Integrale, für $a < 1$, ein convergentes; daher stellt sich auch die Reihe (I), wie vorhin, als convergent heraus.

119. Wir sind nun in der Lage den folgenden, die Convergenz unendlicher Reihen betreffenden Lehrsatz aufzustellen:

Wenn u_k das dem Stellenzeiger k entsprechende, allgemeine Glied einer in den Nrn. 114 und 117 bezeichneten, unendlichen Reihe darstellt, so convergirt die Summe dieser Reihe gegen einen endlichen Grenzwerth, oder diese Reihe ist convergent, wenn man die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:}\ \frac{u_{k+1}}{u_k} = \alpha$$

hat, wo das Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen von k bezogen wird, und wo α positiv und um eine endliche Größe kleiner als die Einheit ist.

Stellt man, um diesen Satz zu beweisen, das dem Zeiger k entsprechende Glied der Reihe (I) in der vorhergehenden Nr. durch v_k dar, so hat man:

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = a \text{ für alle Werthe von } k\,.$$

Diese Reihe (I) ist convergirend, wenn a um eine endliche Größe kleiner als die Einheit ist; daher wird die Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_k des vorliegenden Satzes, nach Nr. 117, ebenfalls convergirend sein, wenn beim unendlichen Wachsen von k der Unterschied

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} - \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ oder } \frac{u_{k+1}}{u_k} - a$$

einen negativen, angebbaren Werth darbietet. Besteht nun die Grenzgleichung:

$$\mathrm{Lim}: \frac{u_{k+1}}{u_k} = \alpha,$$

wo α in der oben festgestellten Bedeutung auftritt, dann ist die in Rede stehende Reihe eine convergente, wenn man $\alpha < a$ hat; und da zu jeder Zahl α, die um eine endliche Größe von der Einheit absteht, eine Zahl a angegeben werden kann, die größer als α und um eine endliche Größe kleiner als Eins ist, so ist, unter den festgestellten Voraussetzungen, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_k eine convergente. w. z. b. w.

120. Das Ergebniß der vorangehenden Nr. findet überall Anwendung, wo der Quotient $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ beim unendlichen Wachsen von k einen positiven Grenzwerth darbietet, der um eine endliche Größe kleiner als die Einheit ist. Nähert sich aber dieser Grenzwerth ohne Ende der Einheit, oder ist beim unendlichen Zunehmen von k der Unterschied dieses Quotienten und der Einheit eine unendlich kleinwerdende Größe, so langen die Sätze der vorangehenden Nrn. nicht aus, und wir lassen deßwegen noch einige Sätze über Convergenz und Divergenz der Reihen folgen.

Wir glauben an Deutlichkeit nur zu gewinnen, wenn wir zuerst eine Reihe, in der der Quotient $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ beim unendlichen Wachsen von k ohne Ende der Einheit sich nähert, vorführen, und über deren Convergenz und Divergenz, so weit die von uns bis jetzt aufgestellten Sätze ausreichen, Einiges mittheilen.

Es sei also die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \dots\dots, \qquad (II)$$

wo m eine positive Zahl vorstellt, zur Untersuchung vorgelegt.

Wird das dem Stellenzeiger k entsprechende Glied dieser Reihe durch v_k bezeichnet, so hat man die Gleichung:

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^m,$$

aus welcher zu ersehen ist, daß beim unendlichen Zunehmen von k der Quotient, von dem oben die Rede war, nur um eine unendlich

kleinwerdende Größe von der Einheit absteht; folglich kann von dem in der vorhergehenden Nr. aufgestellten Satze kein Gebrauch gemacht werden.

Da wir aber dennoch, wie sogleich gezeigt werden soll, je nach Beschaffenheit der Zahl m über die Convergenz und Divergenz dieser Reihe werden aburtheilen können, so scheint dieselbe eben so gut einen Anhalt bei der Aufstellung neuer Sätze über Convergenz und Divergenz abzugeben, als die Reihe (I) Nr. 118 bei der Aufstellung des in der vorhergehenden Nr. mitgetheilten Satzes. Daß dem so sei, werden wir in den nächstfolgenden Nrn. zeigen.

Um die Convergenz oder Divergenz der vorliegenden Reihe (II) beurtheilen zu können, legen wir hier die Fundamentalgleichung (I) Nr. 38 zu Grunde:

Läßt man in dieser Gleichung m in —m übergehen, so hat man:

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \text{Const.}$$

Die nach dem Integralzeichen befindliche Function von x, die Function $\frac{1}{x^m}$, nimmt, wenn m positiv ist, beim Uebergange von $x=1$ bis $x=\infty$, beständig ab, und nähert sich zuletzt dem Zustande des unendlichen Abnehmens; ferner erhält man aus dieser Function, wenn statt x nach und nach die Werthe:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots$$

gesetzt werden, die obige Reihe (II): daher eignet sich auch sehr gut das in Nr. 110 aufgestellte Theorem, um die Fälle der Convergenz und Divergenz dieser Reihe zu erfahren.

Sondern wir zuerst die zwei Fälle: $m > 1$ und $m < 1$.

Da man mit Zuziehung der Gleichung (3) Nr. 32, aus der vorigen Integralgleichung, bei der Annahme $m > 1$ folgende Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{m-1}$$

erhält, und da der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen bei der gegenwärtigen Annahme eine endliche Größe vorstellt, so ist das bestimmte Integrale links vom Gleichheitszeichen ein convergentes; daher stellt sich auch, nach dem oben citirten Theoreme, die Reihe (II) als convergent dar, wenn man $m > 1$ hat.

Ist m<1, so giebt dieselbe Integralgleichung folgende Bestimmung:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^m} = \infty ,$$

woraus, nach demselben Satze, die Divergenz der Reihe (II) erkannt wird, wenn man $m < 1$ hat.

Der Fall endlich, wenn man $m = 1$ hat, kann aus der obigen Integralgleichung nicht gefolgert werden, sondern wir legen hier die bekannte Integralgleichung:

$$\int \frac{dx}{x} = \log.x + \text{Const.} ,$$

zu Grunde, und da man hier:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \log.\infty = \infty$$

hat, so ist auch in diesem Falle die Reihe (II) zu den divergenten zu zählen. Fassen wir Alles zusammen, so läßt sich über die Reihe (II) Folgendes aussprechen: Wenn in der Reihe (II) m als positive Zahl angesehen wird, so ist dieselbe convergent, wenn $m > 1$ ist; divergent hingegen, wenn $m \leqq 1$ ist.

121. Wenn nun irgend eine andere, als die Reihe (II) der vorhergehenden Nr. zur Untersuchung in Bezug auf Convergenz oder Divergenz vorliegt, und nähert sich, wenn das allgemeine Glied derselben durch u_k vorgestellt wird, der Quotient $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ beim unendlichen Zunehmen von k ebenfalls ohne Ende der Einheit, so wird man die Ergebnisse der vorangehenden Nr. mit gutem Erfolge benutzen, wenn zuerst die folgenden zwei allgemeinen Sätze festgestellt werden.

Wenn die zwei ohne Ende fortlaufenden Reihen (A) und (B) Nr. 111 die ihnen in den Nrn. 114 und 117 beigelegten Eigenschaften beibehalten, und wenn überdieß noch die Quotienten

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} , \quad \frac{v_{k+1}}{v_k}$$

beim unendlichen Zunehmen von k ohne Ende gegen die Einheit

convergiren, wodurch der in Nr. 117 aufgestellte Satz keine Anwendung findet, dann hat man:

I. Wenn die Reihe (B) eine convergente ist, so ist auch die Reihe (A) eine convergente, falls der Unterschied:

$$\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k - \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^k \qquad (\beta)$$

beim unendlichen Wachsen von k einen angebbaren negativen Werth darbietet; divergirt aber die Reihe (B), so ist auch die Reihe (A) divergirend, falls derselbe Unterschied, beim unendlichen Wachsen von k, sich als angebbare positive Größe darstellt.

Bei der Begründung dieses Satzes wollen wir uns auch nur mit dem ersten Theile desselben befassen.

Da der Ausdruck (β), von irgend einem endlichen Werthe von k angefangen, und bis $k = \infty$ fortgesetzt, als continuirliche Function von k auftritt, so kann auf denselben der in Nr. 116 aufgestellte Satz in seinem ganzen Umfange angewendet werden. Zufolge dieses Satzes und der hier gemachten Voraussetzung giebt es einen endlichen Werth von k, der durch r vorgestellt sein mag, für den der Ausdruck (β) von $k = r$ bis $k = \infty$ beständig negativ bleibt: also besteht die Ungleichheit:

$$\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k < \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^k \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty ,$$

woraus auch

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty$$

gefolgert wird. Bei der gegenwärtig geltenden Annahme ist, nach Nr. 114, die Convergenz der Reihe (A) an die Convergenz der Reihe (B) gebunden, daher ist, wie wir uns vornahmen, der erste Theil unseres angekündigten Satzes erwiesen.

II. Wenn die Reihe (B) eine convergente ist, so ist auch die Reihe (A) convergent, wenn der Unterschied:

$$\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) k - \left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) k \qquad (\beta')$$

beim unendlichen Wachsen von k einen positiven angebbaren Werth darbietet; ist aber die Reihe (B) diver-

girend, so ist es auch die Reihe (A), wenn der gleiche Unterschied, auch beim unendlichen Wachsen von k, als angebbare negative Größe sich herausstellt.

Da die Beweisführung dieses Satzes ganz wie in I vollzogen werden kann, so übergehen wir dieselbe, und machen uns sofort daran, die Brauchbarkeit dieser zwei Sätze bei Untersuchungen über Convergenz und Divergenz der Reihen zu zeigen.

122. Mit Zuziehung des Satzes (I) der vorhergehenden Nr. sind wir nunmehr in der Lage folgendes Theorem zu begründen.

Wenn u_k das dem Stellenzeiger k entsprechende, allgemeine Glied einer in den Nrn. 114 und 117 bezeichneten, unendlichen Reihe darstellt, und es besteht die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k = \frac{1}{e^{\mu}},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und μ eine positive Größe bedeutet; so ist diese Reihe convergirend oder divergirend, je nachdem μ um eine endliche Größe größer oder um eine endliche Größe kleiner als die Einheit ist.

Auch hier wollen wir uns mit der Beweisführung des ersten Theiles dieses Satzes begnügen. Stellt man, zu diesem Zweck, durch v_k das dem Zeiger k entsprechende Glied der Reihe (II) in Nr. 120 dar, dann hat man:

$$\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{mk};$$

da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen beim unendlichen Zunehmen von k den Grenzwerth e^{-m} oder $\frac{1}{e^m}$ darbietet, so hat man auch:

$$\text{Lim:} \left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)^k = \frac{1}{e^m}.$$

Diese Reihe (II) ist convergent, wenn m um eine endliche Größe die Einheit übertrifft; daher wird die Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_k, nach der vorhergehenden Nr., ebenfalls convergent sein, wenn beim unendlichen Zunehmen von k der Ausdruck (β) derselben Nr., oder wenn der Ausdruck:

$$\text{Lim}: \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k - \frac{1}{e^m}$$

einen angebbaren negativen Werth darbietet; hat man sonach die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k = \frac{1}{e^\mu},$$

dann geschieht der letzten Anforderung ein Genüge, wenn man die Ungleichheit:

$$\frac{1}{e^\mu} < \frac{1}{e^m} \text{ oder } \mu > m$$

hat. Da man zu jeder Zahl μ, die um eine endliche Größe die Einheit übertrifft, eine Zahl m angeben kann, die kleiner als μ und um eine endliche Größe größer als die Einheit ist; und da ferner die Reihe (II), in der jedes Glied einen solchen Exponenten m trägt, zu den convergenten gehört: daher convergirt auch unter der vorliegenden Annahme die Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_k w. z. b. w.

123. Mit Zuziehung des Satzes II Nr. 121 sind wir folgendes Theorem festzustellen im Stande.

Wenn u_k dieselbe Bedeutung wie in der vorhergehenden Nr. hat, und es besteht die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) k = \mu,$$

so convergirt oder divergirt die mit dem allgemeinen Gliede u_k begabte Reihe, je nachdem der Grenzwerth μ um eine endliche Größe größer oder kleiner als die Einheit ist.

Um ebenfalls nur den ersten Theil dieses Satzes zu begründen, lassen wir auch hier v_k in der Bedeutung der vorangehenden Nr. auftreten; alsdann hat man:

$$\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) k = \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^m\right\} k;$$

und wenn m positiv und endlich ist, führt diese Gleichung auf folgende Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) k = m.$$

Nun ist die Reihe, deren allgemeines Glied v_k ist, convergent,

wenn die positive Größe m um irgend eine endliche Größe die Einheit übertrifft; daher wird, bei derselben Annahme der Größe m, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede u_k ebenfalls convergent sein, wenn der Ausdruck (β') Nr. 121 oder wenn der Unterschied:

$$\text{Lim}: \left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) k - m$$

einen angebbaren positiven Werth annimmt.

Bestehet daher die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) k = \mu$$

dann geschieht dieser Anforderung zur Convergenz ein Genüge, wenn man:

$$\mu > m$$

hat. Ist nun $\mu > 1$, so ist auch eine Zahl m denkbar, die kleiner als μ und größer als Eins ist, daher 2c.

124. Die Sätze der beiden vorhergehenden Nrn. sind für die Anwendung unbrauchbar, wenn die daselbst eingeführte und durch μ bezeichnete Größe der Einheit unendlich nahe kömmt. Wir lassen daher, um auch diesen Fall nicht unerörtert zu lassen, einen mit den in Nr. 121 aufgestellten Sätzen, ganz analogen Satz folgen, vermittelst dessen wir zur Kenntniß eines neuen Kennzeichens über Divergenz der Reihen gelangen werden.

Wenn die zwei ohne Ende fortlaufenden Reihen (A) und (B) Nr. 114 sämmtlichen in den Nrn. 114, 117, 121 festgestellten Bedingungen entsprechen, und wenn die Ausdrücke:

$$k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right), \quad k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right),$$

beim unendlichen Wachsen von k, ohne Ende gegen die Einheit convergiren, so ist die Reihe (A) zugleich mit der Reihe (B) convergirend oder divergirend, je nachdem der Ausdruck:

$$\left\{k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right\}^k - \left\{k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right\}^k, \qquad (\gamma)$$

beim unendlichen Wachsen von k, einen angebbaren positiven oder negativen Werth darbietet.

Den ersten Theil dieses Satzes können wir, wie folgt, begründen. Da der Ausdruck (γ) von irgend einem endlichen Werthe von k angefangen, und für alle noch größeren Werthe von k bis ins Unendliche fortgesetzt, eine continuirliche Function von k verbleibt, so findet der in Nr. 116 begründete Satz in seiner ganzen Allgemeinheit Statt. Wenn nun dieser Ausdruck (γ) beim unendlichen Wachsen von k einer angebbaren positiven Größe sich nähert, so bestehet, diesem Satze gemäß, wenn r einen hinlänglich großen, jedoch endlichen Zahlenwerth vorstellt, die Ungleichheit:

$$\left\{k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right\}^k > \left\{k\left(1-\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right\}^k \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty;$$

ferner stellen, mit Beachtung der in Nr. 114 getroffenen Annahmen, die Binomien:

$$1-\frac{u_{k+1}}{u_k}, \quad 1-\frac{v_{k+1}}{v_k},$$

innerhalb derselben Grenzwerthe von k, positive Größen dar; daher kann dieser Ungleichheit nur dann ein Genüge geschehen, wenn man

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \frac{v_{k+1}}{v_k} \text{ von } k = r \text{ bis } k = \infty$$

hat; und umgekehrt. Beim Statthaben dieser Ungleichheit convergirt die Reihe (A) zugleich mit der Reihe (B), daher auch beim Statthaben der obigen Ungleichheit. w. z. b. w.

125. Ehe wir zur Anwendung dieses Theorems übergehen, wird es gut sein, zuerst eine unendlich fortlaufende Reihe, in der die Größe μ Nr. 123 der Einheit gleich wird, in Bezug auf Convergenz und Divergenz zu untersuchen.

Die folgende ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$\frac{1}{2(\log.2)^\alpha}+\frac{1}{3(\log.3)^\alpha}+\frac{1}{4(\log.4)^\alpha}+\frac{1}{5(\log.5)^\alpha}+\ldots, \text{(III)}$$

in der α einen positiven Werth hat, scheint am Besten hierzu geeignet zu sein; denn stellt man durch v_k das dem Stellenzeiger k entsprechende Glied dieser Reihe dar, und entwickelt man den Ausdruck:

$$\left(1-\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)k$$

nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\log.(k+2)}$ und $\frac{1}{k+2}$, so erhält man:

$$\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) k = 1 + \frac{\alpha}{\log.(k+2)} - \frac{3}{k+2} - \ldots\ldots$$

woraus beim unendlichen Zunehmen von k, wenn nur α endlich verbleibt, die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:} \left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) k = 1 ,$$

erhalten wird; da man dennoch je nach Beschaffenheit des Werthes von α, wie wir sogleich zeigen werden, die Fälle der Convergenz und Divergenz dieser Reihe bestimmen kann, so eignet sich dieselbe ganz vorzüglich zur Aufstellung neuer Kennzeichen über Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

Wir erfahren die Fälle der Convergenz und Divergenz der Reihe (III) auf folgendem Wege:

Wird in der Gleichung (158) Nr. 90 m = —1 und p = 1—α gesetzt, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{x(\log.x)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} (\log.x)^{1-\alpha} + \text{Const.}$$

Ist nun $\alpha < 1$ und positiv, so hat man nach Gleichung (3) Nr. 32

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log.x)^{\alpha}} = \infty ;$$

daher ist alsdann, nach Nr. 110, die vorgelegte Reihe (III) eine divergente.

Ist $\alpha > 1$ und positiv, so ist nach derselben Gleichung

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log.x)^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)(\log.2)^{\alpha-1}} ,$$

und da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen endlich ist, so ist aus demselben Grunde die fragliche Reihe convergent.

Für $\alpha = 1$, hat man zuerst:

$$\int \frac{dx}{x\log.x} = \int \frac{d.\log.x}{\log.x} = \log.(\log.x) + \text{Const.} ,$$

mithin

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log.x} = \infty ,$$

woraus die Divergenz der Reihe (III) gefolgert wird; man kann also über diese Reihe Folgendes aussprechen:

Die Reihe (III) ist convergent oder divergent, je nachdem die positive Zahl $\alpha >$ oder $\leqq 1$ ist.

126. Betrachtet man die in der vorhergehenden Nr. behandelte Reihe in dem Falle, wenn man $\alpha = 1$ hat, so kann man, wenn k in den Zustand des unendlichen Wachsens tritt, folgende Gleichung festsetzen:

$$k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = 1 + \frac{1}{\log.(k+2)},$$

oder auch folgende:

$$k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = 1 + \frac{1}{\log.k};$$

werden beide Theile dieser Gleichung zur kten Potenz erhoben, so hat man:

$$\left\{k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right\}^k = \left\{1 + \frac{1}{\log.k}\right\}^k,$$

oder auch:

$$\left\{k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right\}^k = \left\{1 + \frac{1}{\log.k}\right\}^{e^{\log.k}},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt; ferner ist

$$e^{\log.k} = 1 + \log.k + \frac{1}{1.2}(\log.k)^2 + \frac{1}{1.2.3}(\log.k)^3 + \ldots,$$

daher hat man:

$$\left\{k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\right\}^k =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\log.k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\log.k} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\frac{(\log.k)^2}{1.2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\frac{(\log.k)^3}{1.2.3}} \ldots;$$

beim unendlichen Wachsen von k geht

$1 + \frac{1}{\log.k}$ über in 1,

$\left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\log.k}$ in e,

$\left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\frac{(\log.k)^2}{1.2}}$ in $e^{\frac{\log.k}{1.2}}$,

$\left(1 + \frac{1}{\log.k}\right)^{\frac{(\log.k)^3}{1.2.3}}$ in $e^{\frac{(\log.k)^2}{1.2.3}}$,

u. s. w.

daher hat man:

$$\text{Lim:} \left\{ k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \right\}^k = 1 \,.\, e^{1 + \frac{\log.k}{1.2} + \frac{(\log.k)^2}{1.2.3} + \cdots},$$

oder in dem Falle, wenn in der Reihe (III) der vorhergehenden Nr. $\alpha = 1$ ist, also in dem Falle ihrer Divergenz, hat man die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:} \left\{ k\left(1 - \frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \right\}^k = \infty \,.$$

Zieht man daher das in Nr. 124 festgestellte Theorem in Betracht, so gelangt man zu folgendem Theoreme, das über die Divergenz der Reihen hinreichenden Aufschluß giebt.

Wenn u_k das allgemeine Glied einer unendlichen Reihe darstellt, wie wir solche in den Nrn. 114, 117, 121 und 124 bezeichnet haben, und bietet dieselbe die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:} \left\{ k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \right\}^k = \mu_1$$

dar, so ist dieselbe divergent, wenn μ_1 was immer für eine nicht unendlich großwerdende Größe bezeichnet, die jedoch der getroffenen Annahme zufolge nur positiv sein kann.

127. Sowohl einige Anwendungen der bis jetzt gewonnenen Sätze über Convergenz und Divergenz bestimmter Integralien und unendlicher Reihen mitzutheilen, als auch einen für die Integralrechnung nicht unwichtigen Satz zu gewinnen, beabsichtigend, legen wir uns folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_a^\infty \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}\,dx$$

zur Untersuchung in Bezug auf Convergenz und Divergenz vor.

Wenn der Kürze wegen folgende Gleichung festgestellt wird:

$$\varphi(x) = \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n},$$

so setzen wir, zur Vereinfachung der Untersuchung, die von x unabhängigen Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots A_m, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$

dermaßen voraus, daß die Function $\varphi(x)$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=\infty$ beständig mit demselben Zeichen begabt erscheine; aus gleichem Grunde sei die untere Integrationsgrenze a so gewählt, daß dieselbe Function $\varphi(x)$ für keinen, innerhalb der Integrationsgrenzen fallenden Werth von x unendlich groß werde.

Setzen wir in diese Function statt x nach und nach die Werthe:

$$a,\quad a+h,\quad a+2h,\quad a+3h,\quad a+4h,\quad \ldots\quad a+ih,$$

wo h einen beliebigen, endlichen Werth, und i eine ganze, unendlich großwerdende Zahl vorstellt, so erhält man durch Addition, der sich so ergebenden Werthe von $\varphi(x)$ folgende, ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\varphi(a+3h)+\varphi(a+4h)+\ldots; \qquad (\alpha)$$

und je nachdem diese Reihe convergirend oder divergirend ausfällt, wird auch, nach Nr. 110, das vorgelegte bestimmte Integrale convergirend oder divergirend sein.

Unser nächstes Geschäft wird daher sein, die Fälle der Convergenz und Divergenz dieser Reihe auszuscheiden.

Setzt man, um das dem Stellenzeiger k entsprechende Glied dieser Reihe zu gewinnen, in die obige $\varphi(x)$ darstellende Gleichung $a+kh$ statt x, so hat man:

$$\varphi(a+kh)=\frac{A_0(hk+a)^m+A_1(hk+a)^{m-1}+\ldots+A_{m-1}(hk+a)+A_m}{a_0(hk+a)^n+a_1(hk+a)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(hk+a)+a_n},$$

oder wenn die angezeigten Potenzirungen ausgeführt und folgende Gleichungen:

$$B_0=A_0h^m,$$

$$B_1=\left[A_0\binom{m}{1}a+A_1\right]h^{m-1},$$

$$B_2=\left[A_0\binom{m}{2}a^2+A_1\binom{m-1}{1}a+A_2\right]h^{m-2},$$

$$B_3=\left[A_0\binom{m}{3}a^3+A_1\binom{m-1}{2}a^2+A_2\binom{m-2}{1}a+A_3\right]h^{m-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_0=a_0h^n,$$

$$b_1=\left[a_0\binom{n}{1}a+a_1\right]h^{n-1},$$

$$b_2 = \left[a_0\binom{n}{2}a^2 + a_1\binom{n-1}{1}a + a_2\right]h^{n-2},$$

$$b_3 = \left[a_0\binom{n}{3}a^3 + a_1\binom{n-1}{2}a^2 + a_2\binom{n-1}{1}a + a_3\right]h^{n-3},$$

. . . .

festgestellt werden, hat man auch folgende Gleichung:

$$\varphi(a+kh) = \frac{B_0k^m + B_1k^{m-1} + B_2k^{m-2} + B_3k^{m-3} + \ldots}{b_0k^n + b_1k^{n-1} + b_2k^{n-2} + b_3k^{n-3} + \ldots},$$

wo, wie die vorangehenden Gleichungen zeigen, die Größen B_0, B_1.. b_0, b_1, .. von k unabhängig sind.

Um das dem Stellenzeiger $k+1$ entsprechende Glied der Reihe (α) zu erhalten, setze man in der letzten Gleichung k in $k+1$ um, so erhält man, wenn abkürzend folgende Gleichungen festgestellt werden:

$$C_0 = B_0,$$

$$C_1 = \binom{m}{1}B_0 + B_1,$$

$$C_2 = \binom{m}{2}B_0 + \binom{m-1}{1}B_1 + B_2,$$

$$C_3 = \binom{m}{3}B_0 + \binom{m-1}{2}B_1 + \binom{m-2}{1}B_2 + B_3,$$

. . . .

$$c_0 = b_0,$$

$$c_1 = \binom{n}{1}b_0 + b_1,$$

$$c_2 = \binom{n}{2}b_0 + \binom{n-1}{1}b_1 + b_2,$$

$$c_3 = \binom{n}{3}b_0 + \binom{n-1}{2}b_1 + \binom{n-2}{1}b_2 + b_3,$$

. . . .

die Gleichung:

$$\varphi[a+(k+1)h] = \frac{C_0k^m + C_1k^{m-1} + C_2k^{m-2} + C_3k^{m-3} + \ldots}{c_0k^n + c_1k^{n-1} + c_2k^{n-2} + c_3k^{n-3} + \ldots}.$$

Wird nun das dem Stellenzeiger k entsprechende Glied der Reihe (α) durch u_k dargestellt, so hat man zunächst:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\varphi[a+(k+1)h]}{\varphi(a+kh)},$$

und wenn man endlich noch folgende Gleichungen feststellt:

$D_0 = b_0C_0$,	$d_0 = c_0B_0$,
$D_1 = b_1C_0+b_0C_1$,	$d_1 = c_1B_0+c_0B_1$,
$D_2 = b_2C_0+b_1C_1+b_0C_2$,	$d_2 = c_2B_0+c_1B_1+c_0B_2$,
$D_3 = b_3C_0+b_2C_1+b_1C_2+b_0C_3$,	$d_3 = c_3B_0+c_2B_1+c_1B_2+c_0B_3$,
. . . .	. . . .

und wenn man

$$m + n = p$$

setzt, so hat man:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{D_0k^p + D_1k^{p-1} + D_2k^{p-2} + D_3k^{p-3} + \ldots}{d_0k^p + d_1k^{p-1} + d_2k^{p-2} + d_3k^{p-3} + \ldots};$$

und da man überdieß noch $D_0 = d_0$ hat, so erhält man nach Feststellung folgender Gleichungen:

$$\frac{D_1}{D_0} = E_1, \quad \frac{D_2}{D_0} = E_2, \quad \frac{D_3}{D_0} = E_3, \ldots$$

$$\frac{d_1}{d_0} = e_1, \quad \frac{d_2}{d_0} = e_2, \quad \frac{d_3}{d_0} = e_3, \ldots$$

folgenden Zusammenhang zwischen dem kten und (k+1)ten Gliede der vorgelegten Reihe (α):

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k^p + E_1k^{p-1} + E_2k^{p-2} + E_3k^{p-3} + \ldots}{k^p + e_1k^{p-1} + e_2k^{p-2} + e_3k^{p-3} + \ldots} \qquad (\beta)$$

wo E_1, E_2, E_3, . . . e_1, e_2, e_3, . . . endliche und von k unabhängige Größen vorstellen.

Mit der Untersuchung der Convergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe, wo der Quotient zweier Nachbarsglieder durch eine Gleichung wie (β) gegeben erscheint, wollen wir uns in der nächst folgenden Nr. ausführlich beschäftigen.

128. Da die Gleichung (β) der vorhergehenden Nr. bei der Annahme, k gehe in den Zustand des unendlichen Wachsens über, auf die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$$

führt, so reicht der in Nr. 119 begründete Satz über Convergenz der Reihe nicht aus, und wir müssen uns zunächst an die in den Nrn. 122 und 123 aufgestellten Sätze wenden.

I. Legen wir zuerst den Satz aus Nr. 122 zu Grunde.

Der Gleichung (β) der vorhergehenden Nr. kann man zuerst folgende Form geben:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1 + \frac{E_1}{k} + \frac{E_2}{k^2} + \ldots}{1 + \frac{e_1}{k} + \frac{e_2}{k^2} + \ldots};$$

geht k in den Zustand des unendlichen Großwerdens über, so hat man auch:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1 + \frac{E_1}{k}}{1 + \frac{e_1}{k}},$$

und wenn beiderseits zur kten Potenz erhoben wird, ergiebt sich die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^k = \frac{e^{E_1}}{e^{e_1}} = \frac{1}{e^{e_1-E_1}},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt. Es wird also die Reihe, deren allgemeines Glied u_k auf die Gleichung (β) führt, nach dem citirten Satze convergirend oder divergirend sein, je nachdem $e_1 - E_1$ größer oder kleiner als die Einheit ist.

II. Legen wir ferner den in Nr. 123 aufgestellten Satz zu Grunde. Die Gleichung (β) führt auf folgende Gleichung:

$$k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \frac{(e_1-E_1)k^r + (e_2-E_2)k^{r-1} + (e_3-E_3)k^{r-2} + \ldots}{k^r + e_1k^{r-1} + e_2k^{r-2} + \ldots\ldots}, \quad (\gamma)$$

daher hat man beim unendlichen Wachsen von k die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left\{k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right\} = e_1 - E_1;$$

woraus, nach dem citirten Satze, dieselbe Folgerung rücksichtlich der Convergenz und Divergenz der fraglichen Reihe gezogen wird.

Hat man aber

$$e_1 - E_1 = 1,$$

so kommt man mit keinem dieser zwei Sätze bei der Beantwortung der vorliegenden Frage zu einem erwünschten Endziele, und wir müssen uns an den in Nr. 126 begründeten Satz wenden.

III. Legen wir somit diesen Satz unserer Untersuchung zu Grunde, so geht zuerst die obige Gleichung (γ), wegen

$$e_1 - E_1 = 1,$$

in folgende über:

$$k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)=\frac{1+\frac{e_2-E_2}{k}+\frac{e_3-E_3}{k^2}+\ldots}{1+\frac{e_1}{k}+\frac{e_2}{k^2}+\ldots},$$

und für den unendlich großwerdenden Zustand von k kann man auch:

$$k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)=\frac{1+\frac{e_2-E_2}{k}}{1+\frac{e_1}{k}}$$

setzen; erhebt man nun beide Theile dieser Gleichung auf die kte Potenz, und nimmt dann die Grenzen in Bezug auf das unendliche Wachsen von k, so hat man:

$$\text{Lim:}\left\{k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right\}^k=e^{e_2-e_1-E_2},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist; und da die Größe

$$e_2-e_1-E_2$$

nicht unendlich großwerdend ist, so ist die fragliche Reihe unter der vorliegenden Annahme, nach dem angeführten Satze, divergirend, und wir gelangen nunmehr zu folgendem Satze rücksichtlich der Convergenz und Divergenz der Reihe, deren allgemeines Glied u_k der Gleichung (β) der vorangehenden Nr. entspricht:

Diese Reihe ist convergirend oder divergirend, je nachdem $e_1-E_1>$ oder $\leqq 1$ ist.

129. Wenden wir nun das Ergebniß der vorangehenden Nr. auf den in Nr. 127 besprochenen Fall an, so hat man zuerst, wenn die dort aufgestellten Werthe von e_1 und E_1 berücksichtiget werden, die Gleichung:

$$e_1-E_1=\frac{d_1}{d_0}-\frac{D_1}{D_0};$$

werden hier die in derselben Nr. für D_0, D_1, d_0, d_1 aufgestellten Werthe eingesetzt, so hat man:

$$e_1-E_1=\frac{c_1}{c_0}-\frac{b_1}{b_0}+\frac{B_1}{B_0}-\frac{C_1}{C_0};$$

und wenn aus derselben Nr. die Werthe von c_0, c_1, C_0, C_1 eingesetzt werden, erhält man endlich:

$$e_1-E_1=\binom{n}{1}-\binom{m}{1}=n-m.$$

Es ist, diesem zu Folge, die ohne Ende fortlaufende Reihe (α) Nr. 127 eine convergirende oder eine divergirende, je nachdem die positiven Zahlen n und m den Unterschied $n - m >$ oder $\leqq 1$ geben; daher ist auch das zu Anfang derselben Nr. vorgelegte bestimmte Integrale convergirend, oder es bietet dasselbe einen endlichen Werth dar, wenn man

$$n - m > 1$$

hat; in jedem andern Falle ist dieses bestimmte Integrale divergirend, oder dasselbe nähert sich alsdann einem unendlich großwerdenden Grenzwerthe, wodurch jede weitere Bestimmung desselben überflüssig wird.

Wenn noch überdieß die höchsten Exponenten der Variabeln x im Zähler und Nenner der zu integrirenden Differenzialformel dieses bestimmten Integrals ganze Zahlen sind, so muß, um einen endlichen Werth für dieses bestimmte Integrale zu gewärtigen, der höchste Exponent n im Nenner den höchsten Exponent m im Zähler wenigstens um zwei Einheiten übertreffen.

---

§. II.

Darstellung der Werthe bestimmter Integralien aus den entsprechenden unbestimmten Integralfunctionen.

130. Die Werthbestimmung eines bestimmten Integrals aus der entsprechenden unbestimmten Integralfunction unterliegt, wenn das in der Integralrechnung I Nr. 31 und 32 Mitgetheilte berücksichtiget wird, gar keiner Schwierigkeit, und bedarf, wenn namentlich die am gleichen Orte aufgestellte Gleichung (3) zu Hülfe gezogen wird, keiner weiteren Erläuterung, falls nicht die zu Grunde liegende unbestimmte Integralfunction für einen und denselben Werth der allgemeinen Größe mehrerer Werthe zugleich fähig ist. Wir führen, um die Existenz solcher Functionen darzuthun, die Kreisfunction arc.tang.x an, die für jeden Werth von x verschiedene, und zwar unendlich viele Werthe darbietet, welche auf- oder absteigend der Größe nach geordnet, eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung mit der beständigen Differenz π bilden.

Tritt eine solche Function, die wir **vieldeutige** Function nennen werden, als unbestimmtes Integrale einer vorgelegten Differenzialformel auf, und ist der Werth dieses Integrals innerhalb zweier gegebenen Grenzen, nach der oben angeführten Gleichung (3) zu ermitteln, so wird die Vieldeutigkeit der Function eine Unbestimmtheit im Resultate oder im Werthe des bestimmten Integrals darbieten; anderseits wissen wir (Integralrechnung I Nr. 33 — 36), daß wenn in der zu integrirenden Differenzialformel $\varphi(x)dx$ die Function $\varphi(x)$ entweder ursprünglich von jeder Vieldeutigkeit frei, oder nach einem getroffenen Uebereinkommen von derselben frei gemacht wird — und nur von solchen Differenzialformeln wird in der Folge die Rede sein —, daß dasselbe bestimmte Integrale, da solches als Summe einer aus völlig bestimmten Gliedern gebildeten Reihe auftritt, nur ein einziges und unzweideutiges Resultat darbieten muß; beide Bestimmungsweisen eines bestimmten Integrals, die eine nach Gleichung (3) und die andere nach einer der Gleichungen (6), (7), (9), (10) oder (11) (Integralrechnung I), müssen aber ein und dasselbe Resultat darbieten: daher erübriget noch zu zeigen, wie die nach der ersten Bestimmungsweise, falls die unbestimmte Integralfunction vieldeutig ist, sich darbietenden Unbestimmtheiten oder Vieldeutigkeiten zu heben seien, damit auch dann noch nur ein einziges und bestimmtes Resultat erzielt werde.

Das Geschäft der Deutung und Hebung dieser Unbestimmtheiten wird den Inhalt der nächst folgenden Nrn. ausmachen.

131. Zuerst wollen wir zeigen, wie man die Vieldeutigkeit einer Function einer allgemeinen Größe analytisch ausdrücken kann.

Wenn $F(x)$ eine von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche und vieldeutige Function der allgemeinen Größe x darstellt, so kann man die Vieldeutigkeit des Functionwerthes für einen und denselben Werth der allgemeinen Größe dadurch heben, daß man eine oder mehrere von x unabhängige Größen mit der Function verbindet, welche ganz oder zum Theil willkührlich die Vieldeutigkeit der Function ersetzen und, dieselbe eindeutig anzunehmen, gestatten.

So kann man von der Vieldeutigkeit der Function $\text{arc.tang.}x$ ganz absehen, wenn die folgende:

$$r\pi + \text{arc.tang.}x\ ,$$

statt derselben gesetzt wird, wo, wenn die Größe r in der ganzen Allge-

meinheit oder Willkührlichkeit einer ganzen Zahl auftritt, unter arc.tang.x nur einer von den unzähligen Bogen, z. B. der kleinste und positive zu verstehen ist, dessen Tangente die allgemeine Größe x vorstellt.

Eben so drückt man, analytisch, die Vieldeutigkeit der Function $\sqrt[m]{x}$. arc.Sin.x dadurch aus, daß man statt derselben folgende setzt:

$$\left(\text{Cos.}\frac{2r\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\frac{2r\pi}{m}\right)\sqrt[m]{x}\,(2r'\pi + \text{arc.Sin.}x)\,,$$

und in dieser Form die Function $\sqrt[m]{x}$ als eindeutig, oder als jene positive, reelle Function von x erklärt, die, zur mten Potenz erhoben, x giebt, wie unter arc.Sin.x den kleinsten, positiven Bogen sich denkt, dessen Sinus gleich x ist; dafür aber die Größe r jeden der Werthe:

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots m - 1,$$

und die Größe r′ jeden der ganzen positiven oder negativen Zahlenwerthe, Null mitbegriffen, sein läßt.

Im Allgemeinen kann man jede vieldeutige Function einer allgemeinen Größe x, wie F(x), durch eine in Bezug auf x eindeutige Function von der Form:

$$f(r, r', r'', \ldots x),$$

oder einfacher, wenn ϱ irgend eine Function der willkührlichen von x independenten Größen: $r, r', r'', \ldots$ vorstellt, durch eine Function von der Form:

$$f(\varrho, x) \qquad (\alpha)$$

ersetzen; diese Function $f(\varrho, x)$ wird alle vieldeutigen Bestandtheile der Function F(x) enthalten, nur werden dieselben nunmehr als eindeutige Functionen auftreten; dafür aber werden die willkührlichen, neu eingeführten Größen $r, r', r'', \ldots$ oder deren Function ϱ, wie die angeführten zwei besonderen Fälle zeigen, die Vieldeutigkeit eines jeden dieser Bestandtheile ersetzen.

Stellt man demnach die verschiedenen Werthe von ϱ durch:

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_k, \ldots \qquad (\beta)$$

dar, so können sämmtliche aus der Vieldeutigkeit der Function F(x) entspringenden Werthe durch die Functionen:

$$f(\varrho_1, x),\ f(\varrho_2, x),\ f(\varrho_3, x)\ f(\varrho_4, x) \ldots f(\varrho_k, x) \ldots \qquad (\gamma)$$

ersetzt werden. Jede dieser Functionen enthält alle, die Vieldeu-

tigkeit hervorrufenden Bestandtheile von F(x), jedoch legen diese Bestandtheile nunmehr ihre Vieldeutigkeit ab, und treten in jeder dieser Functionen in einem einzigen, unzweideutigen oder völlig bestimmten Sinne auf; so daß die Verschiedenheit der Werthe der Functionen (γ) für einen und denselben Werth von x lediglich von der Verschiedenheit der Werthe der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ herrührt, und keineswegs etwa daher, daß in einer dieser Functionen irgend ein vieldeutiger Bestandtheil in einem, und in einer andern in einem anderen Sinne der Vieldeutigkeit auftritt.

132. Stellt man nun das Differenziale der in der vorhergehenden Nr. betrachteten vieldeutigen Function F(x) durch $\varphi(x)$ dar, d. h. hat man, wenn ω eine unendlich klein werdende Größe vorstellt, die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:} \{F(x+\omega) - F(x)\} = \varphi(x)\omega ,$$

und ersetzt man im Ausdrucke links vom Gleichheitszeichen die Vieldeutigkeit der Function durch Einführung der in (α) aufgestellten eindeutigen Function von x, wodurch folgende Grenzgleichung erhalten wird:

$$\text{Lim:} \{f(\varrho, x+\omega) - f(\varrho, x)\} = \varphi(x)\omega ; \text{*)} \qquad \text{(I)}$$

so kann man folgendes Theorem begründen:

Wenn in die Gleichung (I) für x irgend ein Werth eingesetzt wird, der noch im Bereiche der Continuitätsgrenzen a und b der vieldeutigen Function F(x) oder der eindeutigen Function f(ϱ, x) fällt; so ist zum Bestehen der so erhaltenen Gleichung unerläßlich, daß sowohl in f(ϱ, x+ω), als in f(ϱ, x) für ϱ ein und derselbe Werth aus (β) eingesetzt werde.

Denn wenn bei der Annahme $b > a$ und

$$b = a + n\omega ,$$

wo n eine ganze, unendlich großwerdende, positive Zahl bedeutet, die folgende Grenzgleichung:

*) Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung wird im Allgemeinen auch die Größe ϱ enthalten; da jedoch die An- oder Abwesenheit derselben keinen Einfluß auf die Untersuchungen der vorliegenden und der folgenden Nr. ausübt, so sehen wir einstweilen hievon ab, und versparen die nöthigen Erörterungen darüber auf Nr. 134.

$$\text{Lim:}\ \{f[\varrho_g, a+(m+1)\omega] - f(\varrho_h, a+m\omega)\} = \varphi(a+m\omega)\omega$$

angenommen werden dürfte, wo ϱ_g und ϱ_h zwei ungleich große Werthe von ϱ aus (β) vorstellen, und wo m einen der Zahlenwerthe: 0, 1, 2, 3, .. n — 1 bedeutet, also $a+m\omega$ einer der Werthe von a bis b ist; so müßte auch noch folgende mit derselben gleichbedeutende Gleichung:

$$\text{Lim:}\ \{f[\varrho_g, a+(m+1)\omega] - f(\varrho_g, a+m\omega)\}$$
$$+ \text{Lim:}\ \{f(\varrho_g, a+m\omega) - f(\varrho_h, a+m\omega\} = \varphi(a+m\omega)\omega$$

bestehen. Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung stellt, wenn das bestimmte Integrale $\int_a^b \varphi(x)dx$ als Repräsentant einer Summe auftreten soll (Integralrechnung I), — und nur von dieser Voraussetzung werden wir in allen unseren Untersuchungen geleitet —, eine unendlich kleinwerdende Größe dar; folglich müssen auch die Ausdrücke zur Linken vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung ein unendlich kleinwerdendes Resultat darbieten.

Nun bietet der auf der ersten Zeile links vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung vorkommende Ausdruck einen unendlich kleinwerdenden Werth dar; denn unter den in (γ) vorkommenden Functionen von x ist auch die folgende enthalten:

$$f(\varrho_g, x)\ ,$$

und da solche von $x = a$ bis $x = b$ continuirlich vorausgesetzt ist, so leuchtet sofort die Richtigkeit dieser Behauptung ein: es muß demnach der auf der zweiten Zeile auf derselben Seite des Gleichheitszeichens vorkommende Ausdruck entweder unendlich kleinwerdend oder gleich Null sein.

Das Unstatthafte des so Gefolgerten läßt sich, wie folgt, darthun. Vermöge der Vieldeutigkeit der Function F(x) müssen sämmtliche in (γ) aufgestellten, eindeutigen Functionen von x, unter denen auch die zwei Functionen:

$$f(\varrho_g, x)\ , \quad f(\varrho_h, x)$$

vorkommen, für jeden Werth von $x = a$ bis $x = b$ ungleich große wenigstens endliche Unterschiede eingehende Resultate darbieten; nun stellt $a+m\omega$ einen dieser Werthe von x vor, daher muß auch der Unterschied:

$$f(\varrho_g, a+m\omega) - f(\varrho_h, a+m\omega)\ ,$$

oder dessen, beim unendlichen Abnehmen von ω, sich ergebender Gren

werth mindestens eine endliche Größe vorstellen, woraus die Richtigkeit unserer letzten Behauptung hervorgeht. Bei der Unzulässigkeit des oben gefolgerten Ergebnisses ist aber auch die demselben vorangeschickte Annahme zu verwerfen: wir sehen uns daher, bei der Annahme der Gleichung (I), zur Feststellung folgender Gleichung:

$$\text{Lim:}\ \left\{f[\varrho_g, a+(m+1)\omega] - f(\varrho_g, a+m\omega)\right\} = \varphi(a+m\omega)\omega \qquad (\delta)$$

angewiesen, wo ϱ_g einen der Werthe von ϱ aus (β) vorstellt. w. z. b. w.

133. Nunmehr sind wir in der Lage den folgenden Satz zu begründen:

Wenn Alles seine bisherige Bedeutung beibehält, und wenn der Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi(x)dx$ aus der folgenden Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(\varrho, b) - f(\varrho, a) \qquad (II)$$

zu ermitteln ist, dann muß in beiden Gliedern rechts vom Gleichheitszeichen derselbe Werth für ϱ aus (β) eingesetzt werden.

Für die Annahme $b = a + \omega$ leuchtet die Richtigkeit dieses Satzes aus der Gleichung (δ) der vorhergehenden Nr. ein, wenn man daselbst $m = o$ annimmt.

Für die Annahme $b = a + 2\omega$ wird die Richtigkeit dieses Satzes, wie folgt, dargethan.

Nach Gleichung (9) Nr. 36 hat man folgende Gleichung:

$$\int_a^{a+2\omega} \varphi(x)dx = \omega\varphi(a) + \omega\varphi(a+\omega)\ ;$$

setzt man in die Gleichung (δ) $m = o$, so hat man:

$$\omega\varphi(a) = \text{Lim:}\ \left\{f(\varrho_g, a+\omega) - f(\varrho_g, a)\right\}\ ;$$

wird in dieselbe Gleichung (δ) $m = 1$ gesetzt, und setzt man, um der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Eintrag zu thun, ϱ_h statt ϱ_g, wo ϱ_h einen von ϱ_g verschiedenen Werth von ϱ aus (β) bezeichnet, so hat man:

$$\omega\varphi(a+\omega) = \text{Lim:}\ \left\{f(\varrho_h, a+2\omega) - f(\varrho_h, a+\omega)\right\}\ ;$$

man hat also durch Addition dieser Gleichungen:

$$\int_a^{a+2\omega} \varphi(x)dx = \text{Lim:}\left\{[f(\varrho_h, a+2\omega) - f\varrho_g, a)] + [f(\varrho_g, a+\omega) - f(\varrho_h, a+\omega)]\right\}.$$

Fände nun die Gleichung (II), bei der Annahme $b = a+2\omega$, für ungleiche Werthe von ϱ aus (β) Statt, d. h. hätte man:

$$\int_a^{a+2\omega} \varphi(x)dx = \text{Lim}: \{f(\varrho_h, a+2\omega) - f(\varrho_g, a)\} ,$$

wo ϱ_h und ϱ_g diese zwei ungleichen Werthe von ϱ vorstellen, so hätte man, durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorangehenden, die Gleichung:

$$\text{Lim}: \{f(\varrho_g, a+\omega) - f(\varrho_h, a+\omega)\} = o ,$$

welche, wie in der vorhergehenden Nr. bei einem ähnlichen Anlasse erwiesen wurde, bei der Annahme $\varrho_g \gtrless \varrho_h$ unstatthaft ist. Daher ist auch, bei der Annahme $b = a + 2\omega$, die Richtigkeit unseres angekündigten Theorems dargethan.

Sei ferner $b = a+3\omega$ vorausgesetzt.

Die Gleichung (8) Nr. 36 bietet zuerst folgende Gleichung dar:

$$\int_a^{a+3\omega} \varphi(x)dx = \int_a^{a+2\omega} \varphi(x)dx + \int_{a+2\omega}^{a+3\omega} \varphi(x)dx ;$$

bezeichnet man durch ϱ_g einen der Werthe von ϱ aus (β), so haben wir so eben die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\int_a^{a+2\omega} \varphi(x)dx = \text{Lim}: \{f(\varrho_g, a+2\omega) - f(\varrho_g, a)\}$$

dargethan; ferner giebt die Gleichung (9) Nr. 36:

$$\int_{a+2\omega}^{a+3\omega} \varphi(x)dx = \omega\varphi(a+2\omega) ,$$

und wenn ϱ_h einen der Werthe von ϱ aus (β) vorstellt, der vor der Hand noch verschieden von ϱ_g vorausgesetzt sein mag, so hat man nach Gleichung (δ), wenn daselbst $m=2$ angenommen wird, die Gleichung:

$$\omega\,\varphi(a+2\omega) = \{f(\varrho_h, a+3\omega) - f(\varrho_h, a+2\omega)\} ;$$

daher hat man:

$$\int_a^{a+3\omega} \varphi(x)dx = \text{Lim}: \{[f(\varrho_h, a+3\omega) - f(\varrho_g, a)] + [f(\varrho_g, a+2\omega) - f(\varrho_h, a+2\omega)]\} .$$

Soll nun die Gleichung (II), bei der Annahme $b = a+3\omega$, für ungleiche Werthe von ϱ bestehen, so stellen wir dieselben durch ϱ_h und ϱ_g vor, und man hätte alsdann:

$$\int_a^{a+3\omega} \varphi(x)dx = \text{Lim}: \{f(\varrho_h, a+3\omega) - f(\varrho_g, a)\} ;$$

diese Gleichung mit der vorhergehenden durch Subtraction verbunden, führt auf die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \{f(\varrho_g, a+2\omega) - f(\varrho_h, a+2\omega)\} = o ,$$

welche, wie schon oben bemerkt worden ist, nur in dem Falle $\varrho_g = \varrho_h$ bestehen kann; daher bestehet unser angekündigter Lehrsatz auch für den Fall $b = a + 3\omega$. Ganz auf gleiche Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit dieses Satzes für die Annahme:

$$b = a + m\omega \quad \text{von} \quad m = 1 \quad \text{bis} \quad m = n ,$$

oder man hat:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = f(\varrho_g, b) - f(\varrho_g, a) , \qquad (\varepsilon)$$

wo ϱ_g irgend einen der Werthe von ϱ aus (β) bezeichnet. w. z. b. w.

134. Um über den Werth von ϱ_g aus der Gleichung (ε) der vorangehenden Nr. zu entscheiden, müssen wir uns der Gleichung (I) Nr. 132 zuwenden, die sämmtlichen Resultaten der zwei vorhergehenden Nrn. zu Grunde liegt.

Wenn man

$$\int \varphi(x)dx = F(x) + \text{Const.}$$

hat, und wenn F(x) eine vieldeutige Function von x vorstellt, die man durch Einführung der eindeutigen Function $f(\varrho, x)$ (Nr. 131) ersetzt, so muß an die Stelle von $\varphi(x)dx$ das Resultat der Differenziation von $f(\varrho, x)$ nach x gesetzt werden. Dieses Resultat, welches entweder unabhängig von ϱ, oder als Function von ϱ auftreten wird, ist im ersten Falle $\varphi(x)dx$ selbst, und im zweiten Falle so beschaffen, daß es für $\varrho = o$ in $\varphi(x)dx$ übergeht; denn die eindeutige Function von x, nämlich $f(\varrho, x)$, muß, ebenfalls für $\varrho = o$, die primitive Function F(x) darbieten.

Dieses zugegeben, fällt es nicht mehr schwer den Werth von ϱ_g in der Gleichung (ε) jedesmal zu bestimmen.

In dem ersten Falle, wenn nämlich $\varphi(x)$ den Character der Vieldeutigkeit abgelegt hat, wird man im Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen der Gleichung (ε) für ϱ_g jeden Werth von ϱ setzen dürfen, oder es wird dieser Theil vom Gleichheitszeichen von ϱ unabhängig sein.

Im zweiten Falle wird man statt $\varphi(x)dx$ das Ergebniß der Differenziation von $f(\varrho, x)$ nach x setzen müssen, und da alsdann links und rechts vom Gleichheitszeichen der so umgeformten Gleichung (ε) dieselbe Größe ϱ, oder der allgemeine Werth derselben ϱ_g vorkommen wird, so ist auch in sämmtlichen Theilen dieser Gleichung der-

selbe Werth für ϱ_g aus den in (β) aufgestellten Werthen von ϱ zu setzen; wodurch eben so viel bestimmte Integralausdrücke bestimmt erscheinen, als die Zahl der Werthe, deren ϱ fähig ist, Einheiten enthält.

In den folgenden Nrn. werden wir zur Beleuchtung des bis jetzt Mitgetheilten einige darauf Bezug habende, besondere Fälle vorführen.

135. Aus der Gleichung (17) Nr. 43 erhält man folgende Gleichung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}x + \text{Const.} \; ;$$

da die Function arc.Sin.x eine vieldeutige Function von x ist, so setzen wir statt derselben die Function:

$$2r\pi + \text{arc.Sin.}x \, ,$$

in der r irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, bedeutet, und arc.Sin.x nunmehr noch als eindeutige Function von x auftritt, z. B. als kleinster, positiver Bogen dessen Sinus gleich x ist. Durch Differenziation dieser eindeutigen Function von x geht die Größe r verloren, daher hat man, nach der vorhergehenden Nr.,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}1 - \text{arc.Sin.}0 \, ,$$

wo man in beiden Theilen zur Rechten vom Gleichheitszeichen die kleinsten, positiven Bogen zu nehmen hat. Nun ist:

$$\text{arc.Sin.}1 = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \text{arc.Sin.}0 = 0,$$

daher hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \, . \qquad (1.$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch, wie folgt, überzeugen.

Wenn in der ersten der hier aufgestellten Gleichungen die Function arc.Sin.x die ganze Allgemeinheit ihrer Vieldeutigkeit beibehält, so hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}1 - \text{arcSin.}0 \, ,$$

wo man

$$\text{arc.Sin.}1 = 2r'\pi + \tfrac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \text{arc.Sin.}0 = 2r''\pi$$

hat, und wo r' sowohl als r'' beliebige, ganze Zahlen, Null mit-

begriffen, vorstellen; wenn demnach unter r irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, vorgestellt wird, so hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2r\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Diese unbestimmte Größe r bestimmen wir auf folgendem Wege. Die Gleichung (9) Nr. 36, auf den vorliegenden Fall angewandt, bietet folgende Gleichung dar:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \omega\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2\omega)^2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{1-[(n-1)\omega]^2}}\right\},$$

wo ω eine unendlich klein-, n eine unendlich großwerdende Größe vorstellt, und wo man

$$n\omega = 1$$

hat; wenn k eine der zwischen o und n enthaltenen, ganzen Zahlen vorstellt, so hat man:

$$k\omega > (k\omega)^2,$$

und hieraus

$$\frac{1}{\sqrt{1-k\omega}} > \frac{1}{\sqrt{1-(k\omega)^2}};$$

wird hier statt k nach und nach eine der Zahlen 1, 2, 3, .. n—1 gesetzt, und die obige, den Werth von $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ darstellende Gleichung beachtet, so wird man auch auf folgende Ungleichheit geführt:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \omega\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{1-\omega}} + \frac{1}{\sqrt{1-2\omega}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{1-(n-1)\omega}}\right\};$$

der Ausdruck zur Rechten vom Ungleichheitszeichen stellt nach derselben, angeführten Gleichung (9) den Werth des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ dar, daher hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$$

es ist aber

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x},$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\,,$$

daher hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 2\,;$$

mithin ist in dem obigen Werthe desselben Integrals, der durch $2r\pi + \frac{\pi}{2}$ ausgedrückt erscheint, $r = o$ zu setzen, woraus die Richtigkeit der Gleichung (1) hervorgeht.

Durch ganz analoge Schlüsse wird man auch auf die allgemeine Gleichung:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}a \qquad (2)$$

geführt, wo a numerisch kleiner als die Einheit ist, und arc.Sin.a den numerisch kleinsten Bogen vorstellt, dessen Sinus gleich a ist.

136. Die Gleichung (15) Nr. 42 führt auf folgende Gleichung:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}x + \text{Const.}$$

Die vieldeutige Function arc.tang.x ersetzen wir durch die eindeutige Function von x:

$$r\pi + \text{arc.tang.}x\,,$$

wo r irgend eine ganze Zahl einschließlich Null und arc.tang.x den kleinsten, positiven Bogen, dessen Tangente gleich x ist, vorstellt. Man hat daher nach Nr. 134:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}1 - \text{arc.tang.}0\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}\infty - \text{arc.tang.}1\,,$$

wo in beiden Gleichungen, rechts von den Gleichheitszeichen, die kleinsten, positiven Bogen zu nehmen sind; folglich hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,,\quad \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad (3)$$

und durch Addition dieser Gleichungen, mit Zuziehung der Gleichung (8) Nr. 36, erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} . \qquad (4)$$

Auch von der Richtigkeit dieser Gleichungen können wir uns auf einem andern Wege überzeugen.

Läßt man nämlich in der hier vorgelegten Gleichung die Function arc.tang.x eine vieldeutige Function von x sein, so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = r\pi + \frac{\pi}{4} ,$$

wo r eine unbestimmte, ganze Zahl oder Null sein kann.

Um die Größe r zu bestimmen, bedenke man die Ungleichheit:

$$\frac{1}{1+x^2} < 1 ,$$

die für jeden reellen Werth von x besteht, woraus sofort

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx \text{ oder } < 1$$

gefolgert wird; berücksichtiget man den Werth von r in der letzten Gleichung, so überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit der ersten der Gleichungen (3).

Was die zweite der Gleichungen (3) betrifft, so giebt die oben vorgelegte Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = r\pi + \frac{\pi}{4} ,$$

wo r in der vorigen Bedeutung auftritt; für jeden reellen Werth von x hat man aber

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} ,$$

daher hat man auch:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ oder } < 1 ,$$

woraus die Richtigkeit der zweiten der Gleichungen (3), und mithin auch die der Gleichung (4) einleuchtet.

Auf ähnlichem Wege wird man auf folgende Gleichung:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.a} \qquad (5)$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2,$$

daher hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < 2;$$

mithin ist in dem obigen Werthe desselben Integrals, der durch $2r\pi + \frac{\pi}{2}$ ausgedrückt erscheint, $r = 0$ zu setzen, woraus die Richtigkeit der Gleichung (1) hervorgeht.

Durch ganz analoge Schlüsse wird man auch auf die allgemeine Gleichung:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.Sin.}a \qquad (2)$$

geführt, wo a numerisch kleiner als die Einheit ist, und arc.Sin.a den numerisch kleinsten Bogen vorstellt, dessen Sinus gleich a ist.

136. Die Gleichung (15) Nr. 42 führt auf folgende Gleichung:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}x + \text{Const.}$$

Die vieldeutige Function arc.tang.x ersetzen wir durch die eindeutige Function von x:

$$r\pi + \text{arc.tang.}x,$$

wo r irgend eine ganze Zahl einschließlich Null und arc.tang.x den kleinsten, positiven Bogen, dessen Tangente gleich x ist, vorstellt. Man hat daher nach Nr. 134:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}1 - \text{arc.tang.}0,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.}\infty - \text{arc.tang.}1,$$

wo in beiden Gleichungen, rechts von den Gleichheitszeichen, die kleinsten, positiven Bogen zu nehmen sind; folglich hat man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad (3)$$

und durch Addition dieser Gleichungen, mit Zuziehung der Gleichung (8) Nr. 36, erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} . \qquad (4)$$

Auch von der Richtigkeit dieser Gleichungen können wir uns auf einem andern Wege überzeugen.

Läßt man nämlich in der hier vorgelegten Gleichung die Function arc.tang.x eine vieldeutige Function von x sein, so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = r\pi + \frac{\pi}{4} ,$$

wo r eine unbestimmte, ganze Zahl oder Null sein kann.

Um die Größe r zu bestimmen, bedenke man die Ungleichheit:

$$\frac{1}{1+x^2} < 1 ,$$

die für jeden reellen Werth von x besteht, woraus sofort

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx \text{ oder } < 1$$

gefolgert wird; berücksichtiget man den Werth von r in der letzten Gleichung, so überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit der ersten der Gleichungen (3).

Was die zweite der Gleichungen (3) betrifft, so giebt die oben vorgelegte Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = r\pi + \frac{\pi}{4} ,$$

wo r in der vorigen Bedeutung auftritt; für jeden reellen Werth von x hat man aber

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} ,$$

daher hat man auch:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ oder } < 1 ,$$

woraus die Richtigkeit der zweiten der Gleichungen (3), und mithin auch die der Gleichung (4) einleuchtet.

Auf ähnlichem Wege wird man auf folgende Gleichung:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc.tang.a} \qquad (5)$$

geführt, wo der Ausdruck rechter Hand vom Gleichheitszeichen den numerisch kleinsten Bogen vorstellt, dessen Tangente gleich a ist.

137. Die Gleichung (21) Nr. 44 bietet folgende Gleichung dar:

$$\int \frac{dx}{1+2x\,\mathrm{Cos}.\theta+x^2} = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\theta}.\,\mathrm{arc.tang}.\frac{x+\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta} + \mathrm{Const.}$$

Schließen wir jene Werthe von θ aus, die gleich oder größer als π sind, so behält der Nenner des Bruches links vom Gleichheitszeichen für alle reellen und positiven Werthe von x immer das positive Zeichen bei, und geht nie in den Zustand des unendlichen Abnehmens über: wir können uns alsdann auch, nach Nr. 106, mit der Aufsuchung des Werthes des vorgelegten Integrals innerhalb zweier reellen und positiven Grenzwerthe von x beschäftigen.

Ersetzt man die vieldeutige Function von x, rechts vom Gleichheitszeichen, durch:

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}.\theta}\left(r\pi + \mathrm{arc.tang}.\frac{x+\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\right),$$

wo r ganz und Null sein kann, und arc.tang. den kleinsten Bogen vorstellt, so erhält man nach Nr. 134,

$$\int_0^a \frac{dx}{1+2x\mathrm{Cos}.\theta+x^2} = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\theta}\left\{\mathrm{arc.tang}.\frac{a+\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta} - \mathrm{arc.tang}.\frac{\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\right\},$$

und wegen

$$\mathrm{arc.tang.}u \pm \mathrm{arc.tang.}v = \mathrm{arc.tang}.\frac{u \pm v}{1 \mp uv},$$

hat man auch:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+2x\mathrm{Cos}.\theta+x^2} = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\theta}\cdot\mathrm{arc.tang}.\frac{a\mathrm{Sin}.\theta}{1+a\mathrm{Cos}.\theta}, \qquad (6)$$

wo, wenn a positiv angenommen wird, arc.tang. $\frac{a\mathrm{Sin}.\theta}{1+a\mathrm{Cos}.\theta}$ den kleinsten, positiven Bogen vorstellt, dessen Tangente gleich $\frac{a\mathrm{Sin}.\theta}{1+a\mathrm{Cos}.\theta}$ ist.

Für $a=\infty$ geht diese Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\mathrm{Cos}.\theta+x^2} = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\theta}\,\mathrm{arc.tang.}\,(\mathrm{tang}.\theta).$$

Der kleinste Bogen, dessen Tangente durch tang.θ dargestellt ist, ist kleiner als π und gleich θ; daher hat man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\,Cos.\theta+x^2} = \frac{\theta}{Sin.\theta}, \qquad (7)$$

welche Gleichung für alle Werthe von θ bestehet, die numerisch kleiner als π sind.

138. Man überzeugt sich sehr bald von der Richtigkeit folgender unbestimmten Integralgleichung:

$$\int \frac{(arc.tang.x)^m}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m+1}(arc.tang.x)^{m+1} + Const.$$

Ersetzt man die vieldeutige Function, rechts vom Gleichheitszeichen, durch

$$\frac{1}{m+1}(r\pi + arc.tang.x)^{m+1} + Const.,$$

wo r eine ganze Zahl oder gleich Null sein kann, und arc.tang.x den numerisch kleinsten Bogen vorstellt, dessen Tangente gleich x ist, dann hat man, nach vollzogener Differenziation dieses Ausdruckes nach x, folgende Gleichung statt der vorgelegten:

$$\int \frac{\{r\pi+arc.tang.x\}^m}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m+1}(r\pi + arc.tang.x)^{m+1} + Const.,$$

aus welcher, nach Nr. 134, folgende gezogen wird:

$$\int_0^\infty \frac{\{r\pi+arc.tangx\}^m}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1}\{(2r+1)^{m+1}-(2r)^{m+1}\}, \qquad (8)$$

wo im Ausdrucke links vom Gleichheitszeichen die Function arc.tang.x als eindeutige auftritt. Setzt man aber daselbst arc.tang.x statt $r\pi$+arc.tang.x, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{(arc.tang.x)^m}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1}\{(2r+1)^{m+1}-(2r)^{m+1}\}, \qquad (9)$$

wo nunmehr die links vom Gleichheitszeichen vorkommende Function arc.tang.x als vieldeutige Function von x auftritt. Die verschiedenen Werthe von r dieser Gleichung richten sich, mit Zuziehung der vorangehenden Gleichung (8), nach den verschiedenen Annahmen der Werthe der vieldeutigen Function arc.tang.x, und umgekehrt, wie im Folgenden an einigen besonderen Fällen gezeigt werden soll.

Es sei zuerst r = o, so hat man:

$$\int \frac{(arc.tang.x)^m}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1},$$

140. Die Gleichung (172) Nr. 95. giebt, wenn zuerst x in −x umgesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int_0^n x^p a^{-x} dx =$$

$$= \frac{1.2.3. \ldots p}{(\log.a)^{p+1}} \left\{ 1 - \frac{1}{a^n} \left[1 + n\log.a + \frac{n^2}{1.2} (\log.a)^2 + \ldots \frac{n^p}{1.2.3. \ldots p} (\log.a)^p \right] \right\}$$

wird $a > 1$ gedacht, und versetzt man n in den Zustand des unbestimmten und unendlichen Zunehmens, so erhält man für alle ganzen und positiven Werthe von p die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^p a^{-x} dx = 1.2.3.4. \ldots p \cdot \frac{1}{(\log.a)^{p+1}} . \quad (1[illegible])$$

Wird hier $a = e^m$ angenommen, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen vorstellt, so hat man für jeden positiven Werth von m:

$$\int_0^\infty x^p e^{-mx} dx = 1.2.3.4. \ldots p \cdot \frac{1}{m^{p+1}} . \quad (1[illegible])$$

Diese Gleichung findet nur für ganze und positive Werthe von p Statt; wie der Werth des bestimmten Integrals links vom Gleichheitszeichen für gebrochene Werthe von p zu ermitteln sei, wird erst im folgenden Kapitel gezeigt werden.

141. Die zwei Gleichungen (88) und (89) Nr. 65 eignen sich sehr gut, den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1 + x^p}$$

zu ermitteln. Zuerst kann man diese zwei citirten Gleichungen, die die Fälle, wenn p gerade und wenn p ungerade ist, gesondert darstellen, durch eine, beide Fälle umfassende Gleichung, wie folgt, ersetzen.

Läßt man in (88) m in 2m+1 übergehen, so hat man:

$$\int \frac{x^{2m+1} dx}{1 + x^{2p}} =$$

$$= -\frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} . \log.\left(1 - 2x \,\text{Cos.} \frac{(2k-1)\pi}{2p} + x^2\right)$$

$$+ \frac{2}{2p} \sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.} \frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} . \text{arc.tang.} \frac{x - \text{Cos.} \frac{(2k-1)\pi}{2p}}{\text{Sin.} \frac{(2k-1)\pi}{2p}} + \text{Const.}$$

und da die Gleichung (88), aus der diese gezogen wurde, für alle ganzen und positiven Werthe von m bestehet, die kleiner als 2p sind, so findet die vorliegende Gleichung für jene ganzen und positiven Werthe von m und p Statt, für die man

$$m \leqq p-1$$

hat. Geht ferner in dieser Gleichung x^2 in x oder x in $\sqrt{x}$ über, so hat man auch:

$$\int \frac{x^m dx}{1+x^p} =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}\log.\left(1-2\sqrt{x}\,\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}+x\right)$$

$$+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}.\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{x}-\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}}{\text{Sin.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}}+C.\ ,$$

welche die verlangte Gleichung ist, von der wir bei der Werthbestimmung des vorgelegten bestimmten Integrals ausgehen werden.

Ehe wir uns an die Bestimmung des vorgelegten Integrals machen, schicken wir noch die Bemerkung voraus, daß der Werth dieses Integrals nach Nr. 129 nur dann ein endlicher ist, wenn man:

$$m < p-1 \qquad (\alpha)$$

voraussetzt. Gehen wir daher von der Annahme des Stattbabens dieser Ungleichheit aus, so führt die letzte, unbestimmte Integralgleichung zuerst auf folgende Gleichung:

$$\int_0^n \frac{x^m dx}{1+x^p} =$$

$$= -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}\log.\left(1-2\sqrt{n}.\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}+n\right)$$

$$+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}.\text{arc.tang.}\frac{\sqrt{n}.\text{Sin.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}}{1-\sqrt{n}.\text{Cos.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}}\ ,$$

wo in der zweiten Zeile rechts vom Gleichheitszeichen, nach Nr. 134, der kleinste Bogen zu verstehen ist. Geht nun n in den Zustand des unendlichen Wachsens über, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}.\log.n$$

$$-\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \text{Sin.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}\text{arc.tang.}\left(\text{tang.}\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right),$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^p} = -\frac{1}{p}(\log.n)\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p}$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p} \frac{(2k-1)\pi}{p}\,\text{Sin.}(m+1)\frac{(2k-1)\pi}{p}.$$

Stellt θ irgend einen Bogen vor, so hat man:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}(2k-1)\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\text{Sin.}2p\theta}{\text{Sin.}\theta}; \qquad (\beta)$$

und wenn diese, in Bezug auf θ identische Gleichung nach θ differenzirt wird, so hat man:

$$\sum_{k=1}^{k=p} (2k-1)\text{Sin.}(2k-1)\theta = \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{Sin.}2p\theta.\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta^2} - 2p\,\frac{\text{Cos.}2p\theta}{\text{Sin.}\theta}\right\}. \qquad (\gamma)$$

Wird in diesen zwei Gleichungen

$$\theta = \frac{(m+1)\pi}{p}$$

angenommen, so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{Sin.}2(m+1)\pi}{\text{Sin.}\frac{m+1}{p}\pi},$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} (2k-1)\text{Sin.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} = -p\,\frac{\text{Cos.}2(m+1)\pi}{\text{Sin.}\frac{m+1}{p}\pi}$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Sin.}2(m+1)\pi\,.\,\text{Cos.}\frac{m+1}{p}\pi}{\left(\text{Sin.}\frac{m+1}{p}\pi\right)^2}.$$

Berücksichtiget man die Ungleichheit (α), so ist $m+1 < p$, und

die Nenner der Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen sind sämmtlich von Null verschieden; es ist aber $m+1$ eine ganze Zahl, daher hat man:

$$\sum_{k=1}^{k=p} \text{Cos.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} = o\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} (2k-1)\text{Sin.}\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{p} = -\frac{p}{\text{Sin.}\frac{m+1}{p}\pi}\,,$$

wodurch die obige Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+x^p} = \frac{\frac{\pi}{p}}{\text{Sin.}(m+1)\frac{\pi}{p}}\,. \qquad (13)$$

Diese Gleichung, die nur für ganze und positive Werthe von m und p, welche der Ungleichheit (α) ein Genüge thun, abgeleitet wurde, besteht auch, wie im Verfolge (Nr. 145) dargethan werden soll, für alle reellen und positiven Werthe von m und p, die derselben Ungleichheit genügen.

142. Die Gleichungen (165) bis (168) Nr. 91 führen ebenfalls auf einige beachtungswerthe bestimmte Integralausdrücke.

Berücksichtiget man die a. a. O. festgestellte Bedeutung von $\varphi(y)$ und $\varphi_1(y)$, bedenkt ferner, daß die Functionen Sin.u und Cos.u für reelle Werthe von u die Einheit nie übertreffen, und daß endlich

$$\varphi(o) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_1(o) = o$$

sei, so ergeben sich folgende vier Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{(mA_3 + nB_3)dy}{\varphi(2npy) - \text{Cos.}2mpy} = o\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{(nA_3 - mB_3)dy}{\varphi(2npy) - \text{Cos.}2mpy} = \frac{\pi}{p^2}\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k k\,\text{Sin.}\frac{q}{p}k\pi\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{(mA_4 - nB_4)dy}{\varphi(2npy) + \text{Cos.}2mpy} = o\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{(nA_4 + mB_4)dy}{\varphi(2npy) + \text{Cos.}2mpy} = \frac{\pi}{2p^2}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k(2k-1)\text{Cos.}\frac{q}{p}\frac{2k-1}{2}\pi\,.$$

Aus der trigonometrischen Analysis können wir folgende Gleichungen entlehnen:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k \text{Cos.}k\theta = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{p-1}\frac{\text{Cos.}p\theta+\text{Cos.}(p-1)\theta}{1+\text{Cos.}\theta},\\ &\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k \text{Sin.}(2k-1)\theta = \frac{1}{2}(-1)^p\frac{\text{Sin.}2p\theta}{\text{Cos.}\theta};\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

differenzirt man beide Theile dieser Gleichungen nach θ, so hat man:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k k\text{Sin.}k\theta = \frac{1}{2}(-1)^{p-1}\frac{p\text{Sin.}p\theta+(p-1)\text{Sin.}(p-1)\theta}{1+\text{Cos.}\theta}$$

$$-\frac{1}{2}(-1)^{p-1}\frac{[\text{Cos.}p\theta+\text{Cos.}(p-1)\theta]\text{Sin.}\theta}{(1+\text{Cos.}\theta)^2}, \quad (\beta)$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k(2k-1)\text{Cos.}(2k-1)\theta = \frac{1}{2}(-1)^p\left\{\frac{2p\text{Cos.}2p\theta}{\text{Cos.}\theta}+\frac{\text{Sin.}2p\theta\text{Sin.}\theta}{\text{Cos.}\theta^2}\right\}; (\gamma)$$

wird in die erste dieser zwei Gleichungen $\theta = \frac{q}{p}.\pi$ und in die zweite $\theta = \frac{q}{p}.\frac{\pi}{2}$ gesetzt, und beachtet man den Umstand, daß q und p ganze Zahlen sind, wo, im Falle beide positiv vorausgesetzt werden, nothwendig $q < p$ ist, so hat man folgende zwei Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{k=p-1}(-1)^k k\,\text{Sin.}\frac{q}{p}k\pi = \frac{1}{2}p(-1)^{p+q}\text{tang.}\frac{q}{p}.\frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^k(2k-1)\,\text{Cos.}\frac{q}{p}.\frac{2k-1}{2}\pi = p(-1)^{p+q}.\frac{1}{\text{Cos.}\frac{q}{p}.\frac{\pi}{2}}.$$

Es bieten somit die obigen vier Gleichungen, wenn für A_3, B_3, A_4, B_4 deren Werthe aus Nr. 91 wiederum eingesetzt werden, und y in x umgetauscht wird, folgende vier neue Gleichungen dar:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi[n(p+q)x]\text{Cos.}m(p-q)x-\varphi[n(p-q)x]\text{Cos.}m(p+q)x}{\varphi(2npx)-\text{Cos.}2mpx}dx = \frac{N\pi}{2p}.\text{tang.}\frac{q\pi}{2p},$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1[n(p+q)x]\text{Sin.}m(p-q)x-\varphi_1[n(p-q)x]\text{Sin.}m(p+q)x}{\varphi(2npx)-\text{Cos.}2mpx}dx = \frac{M}{2p}\text{tang.}\frac{q\pi}{2p},$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi[n(p+q)x]\,Cos.m(p-q)x+\varphi[n(p-q)x]Cos.m(p+q)x}{\varphi(2npx)\;+\;Cos.2mpx}dx=\frac{N}{2p}\cdot\frac{1}{Cos.\frac{q\pi}{2p}}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1[n(p+q)x]Sin.m(p-q)x+\varphi_1[n(p-q)x]Sin.m(p+q)x}{\varphi(2npx)\;+\;Cos.2mpx}dx=\frac{M}{2p}\cdot\frac{1}{Cos.\frac{q\pi}{2p}}\,,$$

wo zur Vereinfachung

$$M=\frac{(-1)^{r+q}m}{n^2+m^2}\text{ und }N=\frac{(-1)^{r+q}n}{n^2+m^2}$$

gesetzt wurde.

Daß man, statt $(-1)^{r+q}$ die positive Einheit zu setzen, berechtiget sei, überzeugt man sich aus dem Folgenden:

Zuerst bemerken wir, daß p und q ganze Zahlenwerthe haben, folglich schwankt noch der Werth von $(-1)^{r+q}$ zwischen der positiven und negativen Einheit. Setzt man aber in die obigen vier Gleichungen:

$$2p \text{ statt } p,\quad 2q \text{ statt } q,\quad \frac{m}{2} \text{ statt } m \text{ und } \frac{n}{2} \text{ statt } n\,;$$

so bleiben die Ausdrücke zur Linken der Gleichheitszeichen unverändert; auch die Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen bleiben dieselben, nur daß nunmehr $(-1)^{2r+2q}$ statt $(-1)^{r+q}$ zum Vorschein kömmt; es ist aber:

$$(-1)^{2r+2q}=+1\,,$$

daher ist unsere vorige Behauptung gerechtfertiget, und man hat in dieselben vier Gleichungen

$$M=\frac{m}{n^2+m^2}\quad\text{und}\quad N=\frac{n}{n^2+m^2}$$

zu setzen.

Wird noch überdieß folgende Annahme getroffen:

$$pn=\alpha\,,\quad qn=\beta\,,\quad \frac{m}{n}=\gamma\,,$$

so hat man, wenn abkürzend

$$\frac{\pi}{2\alpha(1+\gamma^2)}=\mu$$

gesetzt wird,

$$\int_0^\infty \frac{\varphi[(\alpha+\beta)x]Cos.\gamma(\alpha-\beta)x-\varphi[(\alpha-\beta)x]Cos.\gamma(\alpha+\beta)x}{\varphi(2\alpha x)\;-\;Cos.2\alpha\gamma x}dx=\mu\,.\,tang.\frac{\beta\pi}{2\alpha}\,,\quad(14)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1[(\alpha+\beta)x]\mathrm{Sin.}\gamma(\alpha-\beta)x-\varphi_1[(\alpha-\beta)x]\mathrm{Sin.}\gamma(\alpha+\beta)x}{\varphi(2\alpha x)-\mathrm{Cos.}2\alpha\gamma x}dx=\gamma\mu.\mathrm{tang.}\frac{\beta\pi}{2\alpha}, \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi[(\alpha+\beta)x]\mathrm{Cos.}\gamma(\alpha-\beta)x+\varphi[(\alpha-\beta)x]\mathrm{Cos}\,\gamma(\alpha+\beta)x}{\varphi(2\alpha x)+\mathrm{Cos.}2\alpha\gamma x}dx=\mu.\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{\beta\pi}{2\alpha}}, \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1[(\alpha+\beta)x]\mathrm{Sin.}\gamma(\alpha-\beta)x+\varphi_1[(\alpha-\beta)x]\mathrm{Sin.}\gamma(\alpha+\beta)x}{\varphi(2\alpha x)+\mathrm{Cos.}2\alpha\gamma x}dx=\gamma\mu.\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{\beta\pi}{2\alpha}}, \quad (17)$$

wo, wegen der Willführlichkeit der obigen Größen m und n, nunmehr α, β, γ beliebige, reelle Größen vorstellen, mit der einzigen Beschränkung jedoch, daß man $\beta < \alpha$ voraussetzen muß.

143. Wir wollen diesen Paragraph damit schließen, einige besondere Fälle der Gleichungen (14) — (17) der vorangehenden Nr. hier zusammen zustellen.

I. Setzt man in diesen Gleichungen $\gamma = o$ voraus, so werden die Gleichungen (15) und (17) identisch realisirt, die Gleichungen (14) und (16) dagegen bieten, wenn die Bedeutung der Function $\varphi(y)$ Nr. 91 beachtet wird, folgende zwei Gleichungen dar:

$$\int_0^\infty \frac{[e^{(\alpha+\beta)x}+e^{-(\alpha+\beta)x}]-[e^{(\alpha-\beta)x}+e^{-(\alpha-\beta)x}]}{e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x}-2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{tang.}\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{[e^{(\alpha+\beta)x}+e^{-(\alpha+\beta)x}]+[e^{(\alpha-\beta)x}+e^{-(\alpha-\beta)x}]}{e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x}+2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\pi}{2}},$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}dx&=\frac{\pi}{2\alpha}.\mathrm{tang.}\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\pi}{2},\\ \int_0^\infty \frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}dx&=\frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\pi}{2}},\end{aligned}\right\}\quad (18)$$

wo β und α reell und an die einzige Bedingung $\beta < \alpha$ gebunden sind.

Diese zwei Gleichungen kann man um ein Namhaftes verallgemeineren, wenn man:

$$e^\beta = b^m, \quad e^\alpha = a^m$$

setzt, wodurch folgende Gleichungen erhalten werden:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{b^{mx}-b^{-mx}}{a^{mx}-a^{-mx}}dx &= \frac{\pi}{2m\log.a}\ \text{tang.}\frac{\log.b}{\log.a}.\frac{\pi}{2},\\ \int_0^\infty \frac{b^{mx}+b^{-mx}}{a^{mx}+a^{-mx}}dx &= \frac{\pi}{2m\log.a}.\frac{1}{\text{Cos.}\frac{\log.b}{\log.a}.\frac{\pi}{2}},\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

wo a, b und m positive, reelle Größen sind, und $b < a$ zu nehmen ist.

II. Man setze in dieselben Gleichungen $\beta = o$, $\alpha = a$, $\gamma = \frac{b}{a}$, so werden die Gleichungen (14) und (16) identisch realisirt, und die Gleichungen (15) und (17) führen, mit Beachtung des Werthes von $\varphi_1(y)$ aus Nr. 91, auf folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\text{Cos.}bx}{e^{2ax}+2\text{Cos.}2bx+e^{-2ax}}dx &= \frac{\pi}{4}.\frac{a}{a^2+b^2},\\ \int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})\text{Sin.}bx}{e^{2ax}+2\text{Cos.}2bx+e^{-2ax}}dx &= \frac{\pi}{4}.\frac{b}{a^2+b^2},\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

wo a und b beliebige, reelle Größen bedeuten, wo jedoch a positiv oder größer als Null sein muß.

---

§. III.

Darstellung der Werthe bestimmter Integralien nach der Methode der Ableitung, und der des Zurückführens auf dem Wege der Substitution, und der Recursion.

144. Die Ableitungsmethode sowohl, als die Integrationsmethode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution (Integralrechnung II. §. II und III) bedürfen noch einiger Erläuterungen und Erörterungen, die wir in Folgendem mittheilen wollen, um dieselben mit sicherem Erfolge bei Herstellung der Werthe bestimmter Integralien in Anwendung bringen zu können.

Wenn die Gleichung:

$$\int \varphi(x)dx = F(x) + \text{Const.} \quad (A)$$

zu Grunde gelegt wird, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = F(b) - F(a) \;. \tag{B}$$

Verfährt man mit dieser Gleichung nach der Ableitungsmethode, d. h. läßt man hier x in $\psi(x)$ übergehen, so bleibt noch die entsprechende Umformung der Integrationsgrenzen zu zeigen übrig.

Wird ferner zur Ausmittelung des Werthes des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \;,$$

die Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution:

$$x = \psi(y) \;,$$

angewandt, wodurch

$$\varphi(x)dx = \varphi[\psi(y)]\psi_1(y)dy$$

erhalten wird, wo

$$\psi_1(y) = \frac{d.\ \psi(y)}{dy}$$

ist, und setzt man:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_\alpha^\beta \varphi[\psi(y)]\psi_1(y)dy \;, \tag{C}$$

so bleiben auch hier die neuen Integrationsgrenzen α und β zu ermitteln übrig.

Wir gelangen zur Kenntniß dieser neuen Integrationsgrenzen, indem wir uns der Gleichung (A) zuwenden.

Wird in der Gleichung (A) x in $\psi(x)$ umgesetzt, so hat man:

$$\int \varphi[\psi(x)]\psi_1(x)dx = F[\psi(x)] + \text{Const.} \;,$$

woraus

$$\int_\alpha^\beta \varphi[\psi(x)]\psi_1(x)dx = F[\psi(\beta)] - F[\psi(\alpha)] \tag{D}$$

gezogen wird; vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (B), namentlich die nach den Integralzeichen vorkommenden Functionen von x, so kann man diese Gleichung (D) nur in dem Falle, als durch Ableitung (Integralrechnung II. §. II) aus (B) entstanden, ansehen, wenn man folgende Gleichung:

$$F(b) - F(a) = F[\psi(\beta)] - F[\psi(\alpha)] \tag{E}$$

festsetzt; da diese die einzige Gleichung ist, die bei der Bestimmung der neuen Grenzen α, β zu Rathe gezogen werden muß, so ersieht

man, daß unendlich viele bestimmte Integralien aus einem einzigen bestimmten Integrale, nach der Ableitungsmethode, gewonnen werden können. Unter diesen neu gewonnenen bestimmten Integralien ist jenes das gebräuchlichste, welches folgende Auflösung der letzten Gleichung darbietet, nämlich:

$$\psi(\beta) = b, \quad \psi(\alpha) = a. \qquad \text{(F)}$$

Diese zwei Gleichungen thun offenbar der Gleichung (E) ein Genüge; bestimmt man daher aus denselben die Werthe von α und β, und setzt dieselben in die Gleichung (D) ein, so ist die so erhaltene Gleichung, als eine nach der Ableitungsmethode aus (B) gewonnene, neue bestimmte Integralgleichung anzusehen.

Im ganzen Verfolge dieses Werkes werden wir uns lediglich dieser Gleichungen (F) bedienen, um aus bekannten bestimmten Integralausdrücken, nach der Ableitungsmethode, zu den Werthen neuer bestimmten Integralien zu gelangen. Wird bei der Ausmittelung des Werthes eines bestimmten Integrals die Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution eingeschlagen, wo man demnach auf eine Gleichung wie (C) geführt wird, so kann man dieselben Gleichungen (F) bei der Bestimmung der Werthe von α und β zu Grunde legen. Es haben nämlich die zwei Methoden, die der Ableitung und die der Substitution, das gemein, die Werthe zweier bestimmten oder unbestimmten Integralausdrücke durch eine neu eingeführte, vermittelnde Function, wie $\psi(x)$ oder $\psi(y)$, in gegenseitige Abhängigkeit zu bringen, die erste Methode durch ein Fortentwickeln und letztere durch ein Zurückführen: aus diesem Grunde gilt bei beiden Methoden dieselbe Vorschrift rücksichtlich der Werthbestimmung der neuen Integrationsgrenzen α und β.

145. Wir schicken uns nunmehr an, abwechselnd, nach den drei in der Ueberschrift dieses Paragraphen angezeigten Integrationsmethoden die Werthe bestimmter Integralien herzuleiten und zusammenzustellen.

Zuerst wollen wir, mit Zuziehung des in der vorhergehenden Nr. Mitgetheilten, die Richtigkeit der am Schlusse Nr. 141 gemachten Behauptung, die Gleichung (13) betreffend, darthun.

Setzt man in dieser Gleichung (13), die nur für ganze Werthe von m und p abgeleitet wurde, nach der Methode der Ableitung,

$$x \text{ in } x^n, \text{ also } dx \text{ in } n x^{n-1} dx$$

um, so bieten die Gleichungen (F) der vorangehenden Nr. folgende Gleichungen zur Bestimmung von α und β dar:

$$\infty = \beta^n, \qquad o = \alpha^n;$$

sieht man n als positive, reelle Größe an, so findet man:

$$\beta = \infty, \qquad \alpha = o,$$

und aus der citirten Gleichung (13) wird nun folgende gewonnen:

$$\int_0^\infty \frac{n x^{mn+n-1} dx}{1 + x^{np}} = \frac{\frac{\pi}{p}}{\text{Sin.}(m+1)\frac{\pi}{p}},$$

oder auch

$$\int_0^\infty \frac{x^{mn+n-1} dx}{1 + x^{np}} = \frac{\frac{\pi}{np}}{\text{Sin.}(m+1)\frac{\pi}{p}}.$$

Setzt man nun

$$mn + n - 1 = m' \text{ und } np = p',$$

so sind, wegen der Willkührlichkeit von n, m' sowohl als p' völlig willkührlich, die jedoch, wegen der Beschränkung $m < p - 1$ (Nr. 141 (α)), der Bedingung:

$$m' < p' - 1$$

entsprechen müssen, wodurch dann die vorige Gleichung in folgende:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m'} dx}{1 + x^{p'}} = \frac{\frac{\pi}{p'}}{\text{Sin.}(m'+1)\frac{\pi}{p'}}$$

übergeht, d. h. die citirte Gleichung (13) findet für alle reellen und positiven Werthe von m und p Statt, die der am gleichen Orte aufgestellten Ungleichheit (α) genügen. w. z. b. w.

146. Wird in den Gleichungen (18) Nr. 143, die für alle reellen Werthe von α und β bestehen, welche der Bedingung $\alpha < \beta$ genügen, x in log.x umgesetzt, mithin e^x in x und dx in $\frac{dx}{x}$, so ergeben sich, mit Beachtung der Gleichungen (F), 1 und ∞ als neue Grenzwerthe der bestimmten Integralien, und man hat:

$$\int_1^\infty \frac{x^{\alpha+\beta-1} - x^{\alpha-\beta-1}}{x^{2\alpha} - 1} dx = \frac{\pi}{2\alpha} . \text{tang.} \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\pi}{2},$$

$$\int_1^\infty \frac{x^{\alpha+\beta-1} + x^{\alpha-\beta-1}}{x^{2\alpha}+1}\,dx = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\pi}{2}},$$

oder, wenn man:

$$\alpha+\beta = m, \quad \alpha-\beta = p$$

setzt, folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\,dx = \frac{\pi}{m+p}\cdot\mathrm{tang.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2},\\
&\int_1^\infty \frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\,dx = \frac{\pi}{m+p}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

die für alle reellen, positiven Werthe von m und p bestehen.

Geht in diesen Gleichungen x in $\frac{1}{x}$ über, und berücksichtiget man die Gleichungen (F), wie die Gleichung (4) Nr. 32, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\,dx = \frac{\pi}{m+p}\cdot\mathrm{tang.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2},\\
&\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\,dx = \frac{\pi}{m+p}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

welche für dieselben Werthe von m und p als die vorangehenden Gleichungen Statt haben.

Durch Addition der ersten und ersten, wie der zweiten und zweiten der Gleichungen (21) und (22) erhält man, mit Zuziehung der Gleichung (8) Nr. 36, folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{x^{m+p}-1}\,dx = \frac{2\pi}{m+p}\,\mathrm{tang.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2},\\
&\int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{p-1}}{x^{m+p}+1}\,dx = \frac{2\pi}{m+p}\cdot\frac{1}{\mathrm{Cos.}\frac{m-p}{m+p}\cdot\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

die ebenfalls für alle reellen und positiven Werthe von m und p bestehen.

147. Vertauscht man in den zwei Gleichungen (199) und (α') Nr. 102 z in x und x in y, setzt dann $b = c = 1$, so hat man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int \frac{dy}{1+y^n},$$

wo

$$y = \frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

ist. Wenn nun das Integrale links vom Gleichheitszeichen innerhalb der Grenzen 0 und 1 zu bestimmen wäre, so hätte man nach Gleichung (C) Nr. 144:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_\alpha^\beta \frac{dy}{1+y^n},$$

und die Gleichungen (F) derselben Nr., auf den vorliegenden Fall angewandt, geben alsdann:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt[n]{1-1^n}} = \infty, \quad \alpha = \frac{0}{\sqrt[n]{1-0^n}} = 0;$$

daher hat man, nach der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Substitution, folgende Gleichung:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^n},$$

und mit Zuziehung der Gleichung (13) Nr. 141 folgende:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\text{Sin.}\frac{\pi}{n}}. \qquad (N.$$

Verfährt man auf analoge Weise mit den Gleichungen (α'') und (200) Nr. 104, d. h. vertauscht man z in x und x in y, setzt dann $a = -1$, $c = 1$ und n statt 2n, so hat man:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[n]{-1+x^2}} = -\frac{n}{2}\int \frac{dy}{1+y^n},$$

wo

$$y = \frac{1}{\sqrt[n]{-1+x^2}}$$

ist; wird hier wie vorhin verfahren, so ergiebt sich zunächst:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[n]{-1+x^2}} = \frac{n}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^n},$$

und hieraus

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[n]{-1+x^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\text{Sin.}\frac{\pi}{n}};$$

verfährt man mit dieser Gleichung nach der Ableitungsmethode, und setzt x^2 in x^m um, so geht $\frac{dx}{x}$ in $\frac{m}{2}\frac{dx}{x}$ über, wodurch man, wenn m positiv gedacht wird, folgende Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[n]{-1+x^m}} = \frac{\frac{\pi}{m}}{\text{Sin.}\frac{\pi}{n}} \qquad (25)$$

erhält.

Aus dieser Gleichung gelangt man auch zur Gleichung (24), wenn $m = n$ und nach der Ableitungsmethode x in $\frac{1}{x}$ umgesetzt wird.

148. Die zwei Recursionsgleichungen (α) und (α') Nr. 97 eignen sich sehr gut, das eigenthümliche der Methode des Zurückführens auf dem Wege der Recursion bei der Ausmittelung bestimmter Integralien zu verdeutlichen. Läßt man in der ersten dieser Gleichungen, nämlich in (α), x in —x übergehen, und berücksichtiget den dieser Gleichung entsprechenden Werth von u_p, so hat man:

$$[a+(2p)^2]\int e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Sin.}x^{2p}dx - 2p(2p-1)\int e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Sin.}x^{2p-2}dx =$$
$$= -e^{-x\sqrt{a}}(\sqrt{a}\,.\,\text{Sin.}x + 2p\text{Cos.}x)\text{Sin.}x^{2p-1}\ ;$$

da p und a unabhängig von x sind, so kann man dieser Gleichung auch folgende Form geben:

$$\int e^{-x\sqrt{a}}\{[a+(2p)^2]\text{Sin.}x^{2p} - 2p(2p-1)\text{Sin.}x^{2p-2}\}\,dx =$$
$$= -e^{-x\sqrt{a}}(\sqrt{a}\,.\,\text{Sin.}x + 2p\text{Cos.}x)\text{Sin.}x^{2p-1}\ ,$$

wo p was immer für eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt; schließt man überdieß noch die negativen Werthe, wie auch den Nullwerth von p aus, so hat man, nach Gleichung (3) Nr. 32, für jeden reellen Werth von $\sqrt{a}$ die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\{[a+(2p)^2]\text{Sin.}x^{2p} - 2p(2p-1)\text{Sin.}x^{2p-2}\}\,dx = 0\ ,$$

woraus folgende Recursionsgleichung gewonnen wird:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Sin.}x^{2p}dx = \frac{2p(2p-1)}{a+(2p)^2}\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Sin.}x^{2p-2}dx\ .$$

Wenn in dieser Gleichung statt p nach und nach eine der Zahlen:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p$$

gesetzt wird, und die so erzeugten Gleichungen mit einander multiplicirt werden, so erhält man folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p}dx = \frac{1.2.3.4.\ \ldots\ (2p-1)2p}{(a+2^2)(a+4^2)\ \ldots\ [a+(2p)^2]}\cdot\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}dx\,;$$

nun ist

$$\int e^{-x\sqrt{a}}dx = -\frac{e^{-x\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} + \mathrm{Const.}\,,$$

daher hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,;$$

folglich geht die obige Gleichung über in:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ (2p-1)2p}{(a+2^2)(a+4^2)\ \ldots\ [a+(2p)^2]}. \quad (26)$$

Behandelt man auf dieselbe Weise die oben citirte Gleichung (α'), so ergiebt sich zunächst die Recursionsgleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p+1}dx = \frac{(2p+1)2p}{a+(2p+1)^2}\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p-1}dx\,;$$

wird auch hier statt p nach und nach

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p$$

gesetzt, und multiplicirt man dann die erhaltenen Gleichungen mit einander, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p+1}dx = \frac{2.3.4.5.\ \ldots\ 2p(2p+1)}{(a+3^2)(a+5^2)\ .\ [a+(2p+1)^2]}\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.xdx\,;$$

wenn in der zweiten der Gleichungen (150) Nr. 88

$$m = -\sqrt{a} \quad \text{und} \quad n = 1$$

angenommen wird, hat man:

$$\int e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.xdx = -\frac{\sqrt{a}\,.\,\mathrm{Sin}.x + \mathrm{Cos}.x}{a+1^2}.\,e^{-x\sqrt{a}} + \mathrm{Const.}\,,$$

daher ist:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.xdx = \frac{1}{a+1^2}\,; \quad (27)$$

und

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\mathrm{Sin}.x^{2p+1}dx = \frac{1.2.3.4.5\ \ldots\ 2p.(2p+1)}{(a+1^2)(a+3^2)\ \ldots\ [a+(2p+1)^2]}. \quad (28)$$

149. Die in der vorhergehenden Nr. gewonnenen Resultate be-

stehen zweifelsohne für alle positiven und endlichen Werthe von a; dieselben bestehen sogar noch für einen unendlich kleinwerdenden Werth von a, wenn man

$$\text{Lim}:\ e^{-x\sqrt{a}} = 0$$

annehmen darf, wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Zunehmen von x Bezug hat.

Dieses ist aber gestattet, wenn man z. B. nur folgende oder eine derselben ähnliche Annahme trifft:

$$a = \omega \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{\omega},$$

wo ω eine unendlich kleinwerdende, positive Größe vorstellt; daher bieten die drei Gleichungen (26), (27) und (28) der vorangehenden Nr. bei der Annahme $a = \omega$ folgende Resultate dar.

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \text{Sin}.x^{2p}\,dx = \infty, \\ &\int_0^\infty \text{Sin}.x\,dx = 1, \\ &\int_0^\infty \text{Sin}.x^{2p+1}\,dx = \frac{2.4.6.\ \ldots\ 2p}{1.3.5.\ \ldots\ 2p-1} \cdot \frac{1}{2p+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

welche für alle ganzen und positiven Werthe von p bestehen.

Zu denselben Resultaten werden wir noch im Verfolge dieses Kapitels auf einem von dem hier befolgten ganz abweichenden Wege gelangen.

150. Schließt man jene negativen Werthe von a aus, deren am Schlusse Nr. 97 Erwähnung geschah, so bestehen die Gleichungen (26), (27) und (28) auch für negative Werthe von a, wenn man folgende Grenzgleichung:

$$\text{Lim}:\ e^{-x\sqrt{-a}} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{Lim}:\ e^{-x\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = 0$$

begründen kann, wo nunmehr a als positive Größe auftritt, und das Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen von x bezogen wird.

Wir versparen die Begründung dieser Grenzgleichung auf die nächstfolgende Nr., und machen uns daran, die Folgerungen, die aus dieser Annahme entspringen, hier aufzustellen.

Setzt man in den Gleichungen (26) und (28) a in —a um, und bedenkt die Gleichung:

$$e^{-x\sqrt{-a}} = e^{-x\sqrt{a}\sqrt{-1}} = \text{Cos}.x\sqrt{a} - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x\sqrt{a},$$

so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty \left\{ \mathrm{Cos.}x\sqrt{a} - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x\sqrt{a} \right\} \mathrm{Sin.}x^{2p} dx = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-a)(4^2-a)\ldots[(2p)^2-a]},$$

$$\int_0^\infty \left\{ \mathrm{Cos.}x\sqrt{a} - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x\sqrt{a} \right\} \mathrm{Sin.}x^{2p+1} dx = \frac{1.2.3.4.5.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-a)(3^2-a)\ldots[(2p+1)^2-a]},$$

da nunmehr a als positive Größe auftritt, so entspringen, wenn $\sqrt{a}$ in m umgesetzt wird, folgende vier Gleichungen:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p} dx = 0\,, \tag{30}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p+1} dx = 0\,, \tag{31}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,, \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p+1} dx = \frac{1.2.3.4.5.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}\,, \tag{33}$$

wo in den Gleichungen (30) und (32) die Größe m aller positiven und negativen Werthe fähig ist, die nicht von der Form 2k sind, wo k ganz und $\gtreqless$ p ist; und in den Gleichungen (31) und (33) jene positiven und negativen Werthe von m ausgeschlossen werden müssen, die von der Form 2k+1 sind, wo k ebenfalls ganz und $\gtreqless$ p ist.

Beachtenswerth ist auch die Uebereinstimmung, die zwischen diesen Ergebnissen und denen der vorangehenden Nr. Statt findet.

Dieses zu zeigen, eignet sich am besten die obige Gleichung (32), die auch noch für $m = 1$ besteht. Wird nämlich in derselben $m = 1$ angenommen, so hat man:

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}x^{2p+1} dx = \frac{1.2.3.4.5.\ldots(2p-1)2p}{1.3.3.5.5.7.\ldots(2p-1)(2p+1)}\,,$$

oder

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}x^{2p+1} dx = \frac{2.4.6.\ldots 2p}{1.3.5.\ldots(2p-1)} \cdot \frac{1}{2p+1}\,,$$

welche mit der dritten der Gleichungen (29) vollkommen übereinstimmt.

151. Wir wollen uns nun an die Begründung der den Resultaten der vorangehenden Nr. zu Grunde liegenden Grenzgleichung machen.

Wenn von den zwei folgenden, ohne Ende fortlaufenden Gliederreihen:

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} + \ldots\ldots,$$

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \ldots\ldots,$$

die erste durch Cos.x und die zweite durch Sin.x bezeichnet oder dargestellt wird, so hat man:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \text{Cos.}x + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}x \,. \qquad (\alpha).$$

Von diesen zwei Functionen von x, nämlich von Cos.x und von Sin.x, läßt sich sehr leicht darthun, daß keine derselben, für einen reellen Werth der allgemeinen Größe x, je die Einheit übertrifft.

In der That, aus der obigen Gleichung fließt auch die folgende:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \text{Cos.}x - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}x \,; \qquad (\beta)$$

multiplicirt man diese zwei Gleichungen mit einander, so ergiebt sich:

$$\text{Cos.}x^2 + \text{Sin.}x^2 = 1 \,;$$

und da, wie aus den aufgestellten Gleichungen abgenommen werden kann, die Functionen Cos.x und Sin.x für reelle Werthe von x reelle Resultate darbieten, so fließt sofort, mit Zuziehung der letzten Gleichung, die Richtigkeit unserer Behauptung.

Man stelle nun in der nach x identischen Gleichung (α) durch x einen solchen Werth der allgemeinen Größe vor, für den man:

$$\text{Cos.}x < 1 \quad \text{und} \quad \text{Cos.}x > \text{Sin.}x$$

hat, und bringe diese Gleichung auf folgende Form:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \text{Cos.}x\left(1 + \sqrt{-1}\,\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\right),$$

so wird die Function $\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}$, die wir durch Tang.x bezeichnen wollen, für diese Specialisirung des Werthes von x, numerisch kleiner als die Einheit sein. Erhebt man nun beide Theile dieser Gleichheit zur mten Potenz, wodurch

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \text{Cos.}x^m\,(1 + \sqrt{-1}\,\text{Tang.}x)^m$$

erhalten wird, so wird die Entwickelung des Binomiums zur Rechten vom Gleichheitszeichen, wenn m eine positive, reelle und keine ganze Zahl vorstellt, eine nach aufsteigenden Potenzen von Tang.x, ohne Ende fortlaufende und convergente Reihe darbieten.

Vollzieht man diese Entwickelung, und sondert die reellen Theile von den imaginären, so ergiebt sich:

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \{\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x)\}\,\mathrm{Cos.}x^m ,$$

wo der Kürze wegen

$$\varphi(x) = 1 - \binom{m}{2}\mathrm{Tang.}x^2 + \binom{m}{4}\mathrm{Tang.}x^4 - \binom{m}{6}\mathrm{Tang.}x^6 + \ldots.$$

$$\psi(x) = \binom{m}{1}\mathrm{Tang.}x - \binom{m}{3}\mathrm{Tang.}x^3 + \binom{m}{5}\mathrm{Tang.}x^5 - \ldots\ldots$$

angenommen ward.

Diese Reihen werden, nach der getroffenen Annahme über m, nie abbrechen; versetzt man überdieß noch m in den Zustand des unendlichen Großwerdens, so hat man:

$$\binom{m}{1} = \frac{m}{1},\quad \binom{m}{2} = \frac{m^2}{1.2},\quad \binom{m}{3} = \frac{m^3}{1.2.3.},\quad \binom{m}{4} = \frac{m^4}{1.2.3.4.}\ \text{u. s. w.}$$

wodurch die letzten zwei Gleichungen in folgende übergehen:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{(m\mathrm{Tang.}x)^2}{1.2} + \frac{(m\mathrm{Tang.}x)^4}{1.2.3.4.} - \frac{(m\mathrm{Tang.}x)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{in inf.}$$

$$\psi(x) = \frac{(m\,\mathrm{Tang.}\,x)}{1} - \frac{(m\mathrm{Tang.}x)^3}{1.2.3} + \frac{(m\mathrm{Tang.}x)^5}{1.2.3.4.5} - \text{in inf.}$$

Berücksichtiget man die anfangs dieser Nr. aufgestellten, ins Unendliche fortzusetzenden Reihen, so ist auch:

$$\varphi(x) = \mathrm{Cos.}(m\mathrm{Tang.}x) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \mathrm{Sin.}(m\mathrm{Tang.}x) ,$$

daher hat man:

$$\mathrm{Lim}:\ e^{mx\sqrt{-1}} = \mathrm{Lim}:\ \{\mathrm{Cos.}(m\mathrm{Tang.}x) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}(m\mathrm{Tang.}x)\}\,\mathrm{Cos.}x^m ,$$

wo das Grenzzeichen Lim:, links und rechts vom Gleichheitszeichen, auf das unendliche Zunehmen von m bezogen ist. Wie groß auch immer mTang.x sein mag, hat man nach dem Obigen:

$$\mathrm{Cos.}(m\mathrm{Tang.}x) \gtreqless 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Sin.}(m\mathrm{Tang.}x) \gtreqless 1 ,$$

und wegen

$$\mathrm{Cos.}x < 1 ,\ \text{hat man}\ \mathrm{Lim}:\ \mathrm{Cos.}x^m = 0 ,$$

daher besteht auch die Grenzgleichung:

$$\mathrm{Lim}:\ e^{mx\sqrt{-1}} = 0 ;$$

auf denselben Grenzwerth wird man auch geführt, wenn man x negativ voraussetzt; daher hat man, wenn mx = z gesetzt wird,

$$\mathrm{Lim}:\ e^{z\sqrt{-1}} = 0 , \tag{I}$$

wo z eine unbestimmte, ins Unendliche zunehmende, positive oder negative, reelle Größe vorstellt.

Ferner findet man, wenn die Gleichung (α), die für alle Werthe von x besteht, zugezogen wird, folgende zwei Gleichungen:

$$\text{Lim}: \text{Cos.}z = o\ , \quad \text{Lim}: \text{Sin.}z = o\ , \qquad \text{(II)}$$

wo z in derselben Bedeutung, als in der Grenzgleichung (I) auftritt. Diese zwei Gleichungen (II) sind es, deren in der Anmerkung zu Nr. 115 Erwähnung geschah.

Um die Grenzwerthe, denen die ganzen und positiven Potenzen von Cos.z und Sin.z beim unendlichen, unbestimmten Wachsen von z sich nähern, zu erhalten, vertausche man in den Gleichungen (α) und (β) x in z, nehme dann ihre Summe und ihren Unterschied, wodurch folgende Gleichungen gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos.}z &= \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}\ , \\ \text{Sin.}z &= \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Dürfte, bei der Beantwortung der vorliegenden Frage, von diesen zwei Gleichungen abgesehen werden, dann hätte man vermöge der Grenzgleichungen (II):

$$\text{Lim}: \text{Cos.}z^p = o\ , \quad \text{Lim}: \text{Sin.}z^p = o\ ,$$

wo man dann für p was immer für eine positive Zahl anzunehmen berechtiget wäre; allein der Umstand, die Gleichungen (II) entspringen lediglich aus der Gleichung (I), mit der Bemerkung vereint, daß beim Potenziren der Gleichungen (γ) die Ausdrücke rechts von den Gleichheitszeichen Glieder hervorrufen können, die independent von z oder $e^{z\sqrt{-1}}$ sind, rechtfertigen die Vorsicht, — die jedesmal, wo man von Grenzgleichungen Folgerungen ziehen will, anzuempfehlen ist —, von den primitiven Gleichungen (α) und (β), oder von den unmittelbar aus denselben gefolgerten (γ) auszugehen. Erheben wir nun, bevor z in den Zustand des unendlichen Großwerdens übergeht, jede der Gleichungen (γ) zur pten Potenz, und setzen dabei den Exponenten p als ganze und positive Zahl voraus, so werden, je nachdem p eine gerade oder ungerade Zahl vorstellen wird, die Ausdrücke rechts der Gleichheitszeichen ein von $e^{z\sqrt{-1}}$ independentes Glied darbieten oder nicht; in letzterem Falle wird man, vermöge der Grenzgleichung (I), wenn z eine unbestimmte, unendlich großwerdende Größe bedeutet, Null, als Grenzwerth für jeden der Ausdrücke links der Gleichheitszeichen erhalten; im ersteren hingegen wird, unter derselben Voraussetzung über den Werth von

z, dieses von z oder $e^{z\sqrt{-1}}$ freie Glied als Grenzwerth hervorgehen, oder man wird, wenn p irgend eine ganze, positive Zahl vorstellt, folgende Grenzgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Lim}: \text{Cos}.z^{2p+1} = o\,, \qquad \text{Lim}: \text{Sin}.z^{2p+1} = o\,, \\ &\text{Lim}: \text{Cos}.z^{2p} = \binom{2p}{p}\cdot\frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}}\cdot\frac{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots 2p}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p}\,, \\ &\text{Lim}: \text{Sin}.z^{2p} = \binom{2p}{p}\cdot\frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}}\cdot\frac{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots 2p}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p}\,. \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Wird in den zwei letzten Gleichungen $p=1$ angenommen, und hierauf die Summe derselben genommen, so gelangt man auf die Gleichung:

$$\text{Lim}: \left\{\text{Cos}.z^2 + \text{Sin}.z^2\right\} = 1\,,$$

die sonach nicht nur für endliche, sondern auch für unendlich groß werdende Werthe von z besteht.

152. Aus den Gleichungen (181) und (182) Nr. 97 kann man Analogieen zu den in den Nrn. 148, 149 und 150 aufgestellten Gleichungen ableiten.

I. Wird daselbst zuerst x in —x umgesetzt, und dann die Werthe der Integralien von $x = o$ bis $x = \infty$ gesucht, so erhält man, mit Zuziehung der dort aufgestellten Gleichungen (β), (γ), (β') und (γ') folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Cos}.x^{2p}dx = A.\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(a+2^2)(a+4^2)\ldots[a+(2p)^2]}\,, \\ &\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Cos}.x^{2p+1}dx = A_1.\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots 2p(2p+1)}{(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p+1)^2]}\,, \end{aligned}\right\} \text{(34)}$$

wo der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} &A = 1+\frac{a}{1.2}+\frac{a(a+2^2)}{1.2.3.4.}+\ldots\frac{a(a+2^2)(a+4^2)\ldots[a+(2p-2)^2]}{1.2.3.4.5.6.\ldots(2p-1)2p}\,, \\ &A_1 = \frac{a}{1}+\frac{a(a+1^2)}{1.2.3}+\ldots\frac{a(a+1^2)(a+3^2)\ldots[a+(2p-1)^2]}{1.2.3.4.5.\ldots 2p(2p+1)}\,, \end{aligned}\right\} (\varepsilon)$$

angenommen ward; und da man mit Zuziehung der ersten der Gleichungen (150) Nr. 88 auf die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Cos}.x\,dx = -\frac{\sqrt{a}.\text{Cos}.x - \text{Sin}.x}{a+1^2}\,.\,e^{-x\sqrt{a}}$$

gelangt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{a}}\,\text{Cos}.x\,dx = \frac{\sqrt{a}}{a+1^2}\,. \qquad \text{(35)}$$

II. Die Annahme, a wird in den Zustand des unendlichen Kleinwerdens versetzt, bietet, wie in Nr. 149, folgende Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx &= \infty\,,\\ \int_0^\infty \mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx &= o\,,\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

wo p eines jeden positiven, ganzen Werthes, Null mitbegriffen, fähig ist.

III. Schließt man, in den Gleichungen (34) und (35), die zu Ende Nr. 97 aufgeführten Ausnahmswerthe von a von aller Betrachtnahme aus, so gelangt man, durch ähnliche Schlüsse wie in Nr. 150, auf folgende Gleichungen:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = o\,, \qquad (37)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = o\,, \qquad (38)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = M\,\frac{1}{m}\cdot\frac{1.2.3.4\,\ldots\,(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\,\ldots\,[(2p)^2-m^2)]}\,, \qquad (39)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = M_1\,\frac{1}{m}\cdot\frac{1.2.3.4.\,\ldots\,2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\,\ldots\,[(2p+1)^2-m^2]}\,, \qquad (40)$$

wo abkürzend:

$$\left.\begin{aligned}M &= 1-\frac{m^2}{1.2}-\frac{m^2(2^2-m^2)}{1.2.3.4.}\ldots-\frac{m^2(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p-2)^2-m^2]}{1.2.3.4.5.6.\,\ldots\,(2p-1)2p}\,,\\ M_1 &= -\frac{m^2}{1}-\frac{m^2(1-m^2)}{1.2.3}\ldots-\frac{m^2(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p-1)^2-m^2]}{1.2.3.4.5.\,\ldots\,2p(2p+1)}\,,\end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

gesetzt wurde. Die Gleichungen (37) und (39) bestehen für alle positiven und negativen Werthe von m, die nicht von der Form 2k sind, und die Gleichungen (38) und (40) für alle positiven und negativen Werthe von m, mit Ausnahme der von der Form 2k+1. In beiden Fällen stellt k eine ganze Zahl vor, die $\overline{\overline{<}}$ p ist.

153. Auf dem Wege der Ableitung wollen wir einige der in den letzten Nrn. zwischen den Grenzen 0 und ∞ ausgemittelten bestimmten Integralien, nunmehr auch zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu bestimmen suchen.

I. Läßt man in den Gleichungen (29) Nr. 149 und in den Gleichungen 36 Nr. 152 x in $x-\frac{\pi}{2}$ übergehen, so gehen die ersteren in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = \infty\,,\\
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}x\,dx = -1\,,\\
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = -\frac{2.4.6.\ldots 2p}{1.3.5.\ldots 2p-1}\cdot\frac{1}{2p+1}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

und die letztern geben folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}x^{2p}\,dx = \infty\,,\\
&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}x^{2p+1}\,dx = 0\,.
\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

Die erste und dritte der so eben aufgestellten Gleichungen (α) von der ersten und zweiten der Gleichungen (36) subtrahirt, erhält man, wegen der Gleichung (8) Nr. 36, folgende Integralbestimmungen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = \infty - \infty\,,\ \text{also unbestimmt, und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = \frac{2.4.6.\ldots 2p}{1.3.5.\ldots 2p-1}\cdot\frac{1}{2p+1}\,;\qquad(41)$$

subtrahirt man aber die erste und zweite der vorhin aufgestellten Gleichungen (β) von der ersten und dritten der oben citirten Gleichungen (29), so ergiebt sich aus gleichem Grunde:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin.}x^{2p}\,dx = \infty - \infty\,,\ \text{also unbestimmt, und}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Sin.}x^{2p+1}\,dx = \frac{2.4.6.\ldots 2p}{1.3.5.\ldots 2p-1}\cdot\frac{1}{2p+1}\,.\qquad(42)$$

Einerseits diese Unbestimmtheiten zu haben, anderseits die bestimmten Ergebnisse der Gleichungen (41) und (42) zu verificiren, legen wir uns die Gleichungen (10) Nr. 139 vor, und setzen daselbst zuerst x in Cos.x um. Die Grenzen 0 und 1 gehen alsdann nach den Gleichungen (F) Nr. 144 in $\frac{\pi}{2}$ und 0 über, und wenn man überdieß noch die Gleichung (4) Nr. 32 in Betracht zieht, so bietet die aus der zweiten der Gleichungen (10) durch Ableitung gewonnene Gleichung genau die Gleichung (41) dar, und die erste dieser Gleichungen giebt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = \frac{1.3.5.7.\ldots 2p-1}{2.4.6.8\ldots 2p}\cdot\frac{\pi}{2}\,,\qquad(43)$$

wodurch eine der obigen Unbestimmtheiten gehoben erscheint.

Setzt man ferner in denselben angeführten Gleichungen (10) x in Sin.x um, so erhält man außer der Gleichung (42) auch folgende:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin.}x^{2p}\,dx = \frac{1.3.5.7.\ \ldots\ 2p-1}{2.4.6.8.\ \ldots\ 2p} \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{44}$$

welche die zweite der obigen Unbestimmtheiten hebt.

II. Läßt man eben so in den vier Gleichungen (30) — (33) Nr. 150 und in den vier Gleichungen (37) — (40) der vorangehenden Nr. x in $x-\frac{\pi}{2}$ übergehen, so bieten die ersteren folgende vier abgeleitete Gleichungen dar:

$$\mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx + \mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = 0,$$

$$\mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx - \mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = 0,$$

$$\mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx - \mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{m}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ (2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ \ldots\ [(2p)^2-m^2]},$$

$$\mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx + \mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ \ldots\ [(2p+1)^2-m^2]};$$

die erste und dritte, wie die zweite und vierte dieser Gleichungen gehörig verbunden, bieten folgendes System von Gleichungen dar:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = -\frac{1}{m}\mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ (2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ \ldots\ [(2p)^2-m^2]},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\,dx = +\frac{1}{m}\mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ (2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ \ldots\ [(2p)^2-m^2]},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = -\mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ \ldots\ [(2p+1)^2-m^2]},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = -\mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ \ldots\ 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ \ldots\ [(2p+1)^2-m^2]};$$

subtrahirt man diese vier Gleichungen, in der Ordnung wie dieselben hier aufgestellt sind, respective von den Gleichungen (37), (39), (38) und (40) der vorangehenden Nr., so erhält man, mit Zuziehung der Gleichung (8) Nr. 36, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos.}mx\,\text{Cos.}x^{2p}\,dx = \frac{1}{m}\,\text{Sin.}\frac{m\pi}{2}\;\frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}mx\,\text{Cos.}x^{2p}\,dx = \frac{1}{m}\left(M-\text{Cos.}\frac{m\pi}{2}\right)\frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos.}mx\,\text{Cos.}x^{2p+1}\,dx = \text{Cos.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ldots\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}mx\,\text{Cos.}x^{2p+1}\,dx = \left(\frac{1}{m}M_1+\text{Sin.}\frac{m\pi}{2}\right)\frac{1.2.3.4.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

wo M und M_1 durch die Gleichungen (β) der vorangehenden Nr. gegeben sind.

Behandelt man auf dieselbe Weise das zweite System der oben citirten vier Gleichungen, so erhält man durch Verbindung derselben mit den Gleichungen (30) bis (33) folgende Integralbestimmungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos.}mx\,\text{Sin.}x^{2p}\,dx = \frac{1}{m}M\,\text{Sin.}\frac{m\pi}{2}\cdot\frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}mx\,\text{Sin.}x^{2p}\,dx = \frac{1}{m}\left(1-M\,\text{Cos.}\frac{m\pi}{2}\right)\frac{1.2.3.4.\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos.}mx\,\text{Sin.}x^{2p+1}\,dx = \left(1+\frac{1}{m}M_1\,\text{Sin.}\frac{m\pi}{2}\right)\frac{1.2.3.4.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}\,,\\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin.}mx\,\text{Sin.}x^{2p+1}\,dx = -\frac{1}{m}M_1\,\text{Cos.}\frac{m\pi}{2}\;\frac{1.2.3.4.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

die auch aus den Gleichungen (45) hervorgehen, wenn man daselbst x in $\frac{\pi}{2}-x$ umsetzt.

Diese zwei Systeme von Gleichungen bestehen für alle Werthe von m, mit Ausnahme derer, die die Nenner der Ausdrücke rechts von den Gleichheitszeichen auf Null bringen.

154. Wir haben, wenn abkürzend

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(m,p) &= \frac{1.2.3.4.\ldots\ldots(2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p)^2-m^2]}\,,\\
\psi(m,p) &= \frac{1.2.3.4.\ldots 2p(2p+1)}{(1^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2p+1)^2-m^2]}
\end{aligned}\right\}$$

gesetzt wird, in den letzten Nrn. und in der unbestimmten Integralrechnung wahrzunehmen Gelegenheit gehabt, daß diese Functionen $\varphi(m,p)$ und $\psi(m,p)$ als Begleiter manches Integralwerthes sich herausstellen: aus diesem Grunde fügen wir noch zum Schlusse dieses Paragraphen einige, diese Functionen betreffende Beziehungen

bei, die als Folgerungen der Gleichungen (45) oder (46) der vorangehenden Nr. hervorgehen.

Wenn man in der ersten dieser Gleichungen (I) p in p+1 übergehen läßt, so verwandelt sich der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in $\varphi(m, p+1)$, daher bietet die erste der Gleichungen (45) der vorangehenden Nr. folgende Gleichung dar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+2}\,dx = \frac{1}{m}\ \mathrm{Sin.}\frac{m\pi}{2}.\varphi(m, p+1)\ ;$$

es ist aber

$$\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos.}(m+1)x\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos.}(m-1)x\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\ ,$$

daher hat man, mit Beachtung der dritten unter den Gleichungen (45) und der zweiten der Gleichungen (I), auch folgende Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos.}\frac{(m+1)\pi}{2}.\psi(m+1, p) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos.}\frac{(m-1)\pi}{2}.\psi(m-1, p)\ ,$$

welche, mit der vorigen verglichen, folgende Beziehung darbietet:

$$\varphi(m, p+1) = \frac{m}{2}\left\{\psi(m-1, p) - \psi(m+1, p)\right\}. \qquad (\alpha)$$

Mit Zugrundelegung der zweiten der Gleichungen (I) kann man der dritten unter den Gleichungen (45) der vorangehenden Nr. folgende Form geben:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx = \mathrm{Cos.}\frac{m\pi}{2}.\psi(m, p)\ ;$$

allein man hat auch

$$\mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos.}(m+1)x\,\mathrm{Cos.}x^{2p} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cos.}(m-1)x\,\mathrm{Cos.}x^{2p}\ ,$$

daher bietet die erste der Gleichungen (45), vereint mit der ersten der Gleichungen (I), folgende Gleichung dar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Cos.}x^{2p+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+1)}\,\mathrm{Sin.}\frac{(m+1)\pi}{2}.\varphi(m+1, p) + \frac{1}{2(m-1)}\,\mathrm{Sin.}\frac{(m-1)\pi}{2}.\varphi(m-1, p)\ ;$$

und wenn die Werthe der zwei zuletzt aufgestellten bestimmten Integralien einander gleich gesetzt werden, hat man auch folgende Beziehung:

$$\psi(m, p) = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+1}\varphi(m+1, p) - \frac{1}{m-1}\varphi(m-1, p)\right\}. \qquad (\beta)$$

Eliminirt man endlich aus diesen zwei Gleichungen (α) und (β) zuerst die Function ψ und hierauf die Function φ, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{m}{m+2}\varphi(m+2,p)+\frac{m}{m-2}\varphi(m-2,p)+4\varphi(m,p+1)-2\varphi(m,p)=o,\\ \psi(m+2,p)+\psi(m-2,p)+4\psi(m,p+1)-2\psi(m,p)=o.\end{aligned}\right\}\quad(\gamma)$$

Diese in (α), (β) und (γ) aufgestellten vier Gleichungen stellen die angekündigten Beziehungen der Functionen φ(m, p) und ψ(m, p) dar.

§. IV.

Darstellung der Werthe bestimmter Integralien nach der Ableitungsmethode, wenn nach einer allgemeinen, von der Integrationsvariabeln unabhängigen Größe differenzirt oder integrirt wird.

155. Die in der Integralrechnung II §. VI behandelte und zur Anwendung gebrachte Integrationsmethode wird auch bei der Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien mit gutem Erfolge angewandt. Da jedoch die Integrationsgrenzen, als neu hinzugekommen und den bestimmten Integralien ausschließlich zugehörend, am angeführten Orte nicht in Betracht kommen konnten, so wollen wir noch den Einfluß dieser Integrationsgrenzen, bei der Anwendung dieser Methode, einer Erörterung unterziehen.

Wenn a eine von x independente, allgemeine Größe vorstellt, und es besteht die Gleichung:

$$\int \varphi(x,a)\,dx = F(x,a)\,, \quad (A)$$

so hat man auch nothwendig:

$$\frac{dF(x,a)}{dx} = \varphi(x,a)\,, \quad (B)$$

wo φ(x, a) und F(x, a) Functionen von x und a bezeichnen, die einer jeden dieser zwei Gleichungen genügen; bezeichnet man ferner durch α und β die Integrationsgrenzen, so bietet die erste dieser Gleichungen Folgendes dar:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,a)\,dx = F(\beta,a) - F(\alpha,a)\,. \quad (C)$$

I. Diese Gleichung, die in Bezug auf a identisch ist, besteht auch

dann noch, wenn man links und rechts vom Gleichheitszeichen a in a+ω übergehen läßt; man hat daher, wenn α sowohl als β unabhängig von a angesehen werden:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x, a+\omega)\,dx = F(\beta, a+\omega) - F(\alpha, a+\omega) \;;$$

wird von dieser Gleichung die vorangehende (C) subtrahirt, und die Größe ω als unendlich kleinwerdend festgestellt, so hat man:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d.\,\varphi(x, a)}{da}dx = \frac{d.\,F(\beta, a)}{da} - \frac{d.\,F(\alpha, a)}{da}, \qquad (D)$$

welche eine durch Differenziation der Gleichung (C) nach a abgeleitete Gleichung ist, die den Werth eines neuen bestimmten Integrals darstellt.

II. Wird hingegen die Gleichung (C) mit der Differenzialformel $\psi(a)da$ multiplicirt, wo $\psi(a)$ irgend eine Function von a vorstellt, und dann von $a=\alpha'$ bis $a=\beta'$ beiderseits integrirt, so bietet sich zuerst folgende Gleichung dar:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'}\Big\{\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x, a)dx\Big\}\psi(a)da = \int_{\alpha'}^{\beta'}\Big\{F(\beta, a) - F(\alpha, a)\Big\}\psi(a)da \;; \qquad (E)$$

multiplicirt man ferner die Gleichung (B) mit $\psi(a)da$, und integrirt dann ebenfalls von $a=\alpha'$ bis $a=\beta'$, so hat man auch:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{d.\,F(x, a)}{dx}\psi(a)da = \int_{\alpha'}^{\beta'}\varphi(x, a)\,\psi(a)da \;;$$

sind aber α' und β' von x unabhängig, dann hat man:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{d\,F(x, a)}{dx}\psi(a)da = \frac{d.\int_{\alpha'}^{\beta'}F(x, a)\,\psi(a)da}{dx},$$

daher geht die vorangehende Gleichung in folgende:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'}\varphi(x, a)\,\psi(a)da = \frac{d.\,f(x, \beta', \alpha')}{dx}$$

über, wo abkürzend

$$\int_{\alpha'}^{\beta'}F(x, a)\,\psi(a)da = f(x, \beta', \alpha')$$

gesetzt wurde; wird noch diese Gleichung mit dx multiplicirt, und von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ integrirt, so erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x, a)\,\psi(a)da \right\} dx = f(\beta, \beta', \alpha') - f(\alpha, \beta', \alpha'),$$

und da man:

$$f(\beta, \beta', \alpha') = \int_{\alpha'}^{\beta'} F(\beta, a)\,\psi(a)da,$$

$$f(\alpha, \beta', \alpha_{,}) = \int_{\alpha'}^{\beta'} F(\alpha, a)\,\psi(a)da$$

hat, so erhält man endlich:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x, a)\,\psi(a)da \right\} dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} \left\{ F(\beta, a) - F(\alpha, a) \right\} \psi(a)da, \quad (F$$

die gleichbedeutend mit der obigen Gleichung (E), und in den meisten Fällen besser als diese geeignet ist, auf dem Wege der Integration nach einer allgemeinen Constante a, die Werthe neuer bestimmter Integralien abzuleiten.

Außerdem gelangt man auch durch Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung (E) auf folgenden Zusammenhang:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(x, a)\,\psi(a)da \right\} dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, a)dx \right\} \psi(a)da,$$

wo α und β unabhängig von a, und mithin auch α' und β' von x unabhängig sind; oder man hat auch, wenn das Produkt

$$\varphi(x, a) . \psi(a) \text{ durch } \Psi(x, a)$$

dargestellt wird, folgende Gleichung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{\alpha'}^{\beta'} \Psi(x, a)\,da \right\} dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(x, a)\,dx \right\} da, \quad (G$$

in der ebenfalls α, β von a, und α', β' von x unabhängig sind und $\Psi(x, a)$ irgend eine Function von x und a bezeichnet.

In der Anwendung der hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen auf besondere Fälle besteht das Wesen der in der Ueberschrift angezeigten Integrationsmethode.

156. Die zweite der Gleichungen (29) Nr. 149 und die zweite der Gleichungen (36) Nr. 152 bieten folgende Gleichungen dar:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Sin}.x\,dx = 1, \qquad \int_0^{\infty} \operatorname{Cos}.x\,dx = 0;$$

setzt man in diesen Gleichungen x in ax um, so gehen dieselben in folgende:

$$\int_0^\infty \text{Sin.}ax\,dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty \text{Cos.}ax\,dx = o \tag{47}$$

über, und da diese Gleichungen für jede endliche Werthenfolge der Größe a bestehen, so kann man dieselben nach a differenziren, und zwar nach Vorschrift der Gleichung (D) der vorangehenden Nr., wodurch folgende zwei Gleichungen abgeleitet werden:

$$\int_0^\infty x\,\text{Cos.}ax\,dx = -\frac{1}{a^2}, \quad \int_0^\infty x\,\text{Sin.}ax\,dx = o\ ;$$

werden nun diese Gleichungen nach a differenzirt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty x^2\,\text{Sin.}ax\,dx = -\frac{1.2}{a^3}, \quad \int_0^\infty x^2\,\text{Cos.}ax\,dx = o\ ;$$

wird auf diese Weise, die jedesmal gewonnenen Gleichungen wiederum nach a zu differenziren, fortgefahren, so erhält man endlich folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{2p}\,\text{Cos.}ax\,dx = o\,,\\
&\int_0^\infty x^{2p+1}\,\text{Cos.}ax\,dx = \frac{(-1)^{p-1}}{a^{2p+2}}.\,1.2.3.4.\,\ldots\,(2p+1)\,,\\
&\int_0^\infty x^{2p+1}\,\text{Sin.}ax\,dx = o\,,\\
&\int_0^\infty x^{2p}\,\text{Sin.}ax\,dx = \frac{(-1)^{p}}{a^{2p+1}}.\,1.2.3.4.\,\ldots\,2p\,,
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

wo p eine ganze und positive Zahl, und a eine endliche, reelle Größe vorstellt.

157. Läßt man in den Gleichungen (27) Nr. 148 und (35) Nr. 152 a in a^2 übergehen, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{Sin.}x\,dx = \frac{1}{1+a^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,\text{Cos.}x\,dx = \frac{a}{1+a^2}.$$

Diese zwei Gleichungen wollen wir ebenfalls n mal nacheinander in Bezug auf a differenziren, wodurch wir zur Kenntniß der Werthe folgender bestimmten Integralien:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\text{Sin.}x\,dx\,, \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\text{Cos.}x\,dx$$

gelangen werden.

Um jedoch die Differenziation der Ausdrücke zur Rechten der

Gleichheitszeichen obiger Gleichungen leichter bewerkstelligen zu können, zerlegen wir die Brüche:

$$\frac{1}{1+a^2}, \qquad \frac{a}{1+a^2}$$

in Theilbrüche, deren Nenner nur noch erste Dimensionen von a enthalten; setzen wir der Kürze wegen $i=\sqrt{-1}$, so gehen die obigen Gleichungen in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.x\,dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{a-i}-\frac{1}{a+i}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-i}+\frac{1}{a+i}\right).$$

Werden diese Gleichungen, nach Gleichung (D) Nr. 155, n mal nacheinander in Bezug auf a differenzirt, so ergeben sich sehr leicht folgende Endgleichungen:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.x\,dx = \frac{1}{2i}.1.2.3.\ldots n\left\{\frac{1}{(a-i)^{n+1}}-\frac{1}{(a+i)^{n+1}}\right\},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.x\,dx = \frac{1}{2}.1.2.3.\ldots n\left\{\frac{1}{(a-i)^{n+1}}+\frac{1}{(a+i)^{n+1}}\right\};$$

läßt man nun in diesen Gleichungen x in bx und a in $\frac{a}{b}$ übergehen, so erhält man auch:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.bx\,dx = \frac{1}{2i}.1.2.3\ldots n\left\{\frac{1}{(a-bi)^{n+1}}-\frac{1}{(a+bi)^{n+1}}\right\},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.bx\,dx = \frac{1}{2}.1.2.3\ldots n\left\{\frac{1}{(a-bi)^{n+1}}+\frac{1}{(a+bi)^{n+1}}\right\};$$

und wenn die Brüche zur Rechten der Gleichheitszeichen auf gemeinschaftliche Benennung gebracht und reducirt werden, erhält man nach geschehener Umsetzung von n in n — 1 folgende Gleichungen:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.bx\,dx =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(a^2+b^2)^n}\left\{\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\binom{n}{5}a^{n-5}b^5-\ldots\right\}, \quad (I$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.bx\,dx =$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(a^2+b^2)^n}\left\{a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-\ldots\right\}. \quad (II)$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammern der ersten dieser Gleichungen schließt mit dem Gliede:

$$(-1)^q \binom{n}{2q+1} a^{n-(2q+1)} b^{2q+1} ,$$

wo, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl vorstellt, $2q+1 = n$ oder $= n-1$ sein wird, und der analoge Ausdruck in der zweiten dieser Gleichungen schließt mit dem Gliede:

$$(-1)^q \binom{n}{2q} a^{n-2q} b^{2q} ,$$

wo, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt, $2q = n$ oder $= n-1$ sein wird.

158. Die Gleichungen (47) Nr. 156 bestehen, Null ausgenommen, für alle Werthe von a; multiplicirt man nun dieselben mit da und integrirt von $a = \alpha$ bis $a = \beta$, so hat man, wenn α und β endliche, mit demselben Zeichen versehene Werthe haben, folgende zwei Gleichungen:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_0^\infty \text{Sin.}ax\,dx\right) da = \int_\alpha^\beta \frac{da}{a} ,$$

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_0^\infty \text{Cos.}ax\,dx\right) da = o ,$$

welche, mit Zuziehung der allgemeinen Gleichung (G) Nr. 155, in folgende übergehen:

$$\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta \text{Sin.}ax\,da\right) dx = \int_\alpha^\beta \frac{da}{a} ,$$

$$\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta \text{Cos.}ax\,da\right) dx = o .$$

Nach der getroffenen Annahme über die Werthe von α und β hat man:

$$\int_\alpha^\beta \frac{da}{a} = \log. \frac{\beta}{\alpha} ;$$

ferner hat man:

$$\int_\alpha^\beta \text{Sin.}ax\,da = \frac{\text{Cos.}\alpha x - \text{Cos.}\beta x}{x} ,$$

$$\int_\alpha^\beta \text{Cos.}ax\,da = \frac{\text{Sin.}\beta x - \text{Sin.}\alpha x}{x} ,$$

daher bieten die obigen zwei Gleichungen folgende Integralbestimmungen dar:

$$\int_0^\infty (\mathrm{Cos.}\alpha x - \mathrm{Cos.}\beta x)\frac{dx}{x} = \log.\frac{\beta}{\alpha}, \qquad (51)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}\beta x \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \mathrm{Sin.}\alpha x \frac{dx}{x}. \qquad (52)$$

159. Aus den Gleichungen (150) Nr. 88 gelangt man sehr bald auf folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Cos.bx}\,dx &= \frac{a}{a^2+b^2},\\ \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Sin.bx}\,dx &= \frac{b}{a^2+b^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Multiplicirt man jede dieser zwei Gleichungen mit db und integrirt von $b=\alpha$ bis $b=\beta$, vertauscht dann links von den Gleichheitszeichen die Integrationszeichen (nach Gleichung G), so hat man:

$$\int_0^\infty \left\{\int_\alpha^\beta \mathrm{Cos.bx}\,db\right\} e^{-ax}\,dx = a\int_\alpha^\beta \frac{db}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty \left\{\int_\alpha^\beta \mathrm{Sin.bx}\,db\right\} e^{-ax}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{b\,db}{a^2+b^2};$$

nun ist

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Cos.bx}\,db = \frac{\mathrm{Sin.}\beta x - \mathrm{Sin.}\alpha x}{x}, \quad \int_\alpha^\beta \mathrm{Sin.bx}\,db = \frac{\mathrm{Cos.}\alpha x - \mathrm{Cos.}\beta x}{x},$$

und

$$\int_\alpha^\beta \frac{db}{a^2+b^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+\alpha\beta},$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{b\,db}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\log.\frac{a^2+\beta^2}{a^2+\alpha^2},$$

daher hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}\beta x - \mathrm{Sin.}\alpha x}{x}.e^{-ax}\,dx = \mathrm{arc.tang.}\frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+\alpha\beta}, \qquad (54)$$

wo im Ausdrucke rechter Hand vom Gleichheitszeichen der kleinste, positive Bogen zu verstehen ist, dessen Tangente dem Bruche:

$$\frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + \alpha\beta}$$

gleich kömmt; und ferner:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}\alpha x - \text{Cos.}\beta x}{x} e^{-ax} dx = \frac{1}{2} \log. \frac{a^2 + \beta^2}{a^2 + \alpha^2}. \tag{55}$$

Wird in diesen Gleichungen (54) und (55) $a = o$ angenommen, so bieten dieselben die Gleichungen (52) und (51) der vorhergehenden Nr. dar. Setzt man in der Gleichung (54) $\beta = -\alpha$ voraus, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha x}{x} . e^{-ax} dx = \frac{1}{2} \text{arc.tang.} \frac{2a\alpha}{a^2 - \alpha^2},$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha x}{x} e^{-ax} dx = \text{arc.tang.} \frac{\alpha}{a}; \tag{56}$$

wird endlich in dieser letzteren Gleichung a in den Zustand des unendlichen Abnehmens versetzt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{57}$$

Multiplicirt man dieselben zwei Gleichungen (53) mit da, und integrirt von $a = \alpha$ bis $a = \beta$, so hat man, wegen:

$$\int_\alpha^\beta e^{-ax} da = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x},$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \text{Cos.bx} dx = \frac{1}{2} \log. \frac{b^2 + \beta^2}{b^2 + \alpha^2}, \\ &\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \text{Sin.bx} dx = \text{arc.tang.} \frac{b(\beta - \alpha)}{b^2 + \alpha\beta}; \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

wird in der ersten dieser Gleichungen b unendlich kleinwerdend vorausgesetzt, so geht Cos.bx in 1 über, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx = \log.\frac{\beta}{\alpha}\,; \qquad (59.$$

wird dieselbe Annahme über b in der zweiten dieser Gleichungen getroffen, so geht

$$\text{Sin.}bx \text{ in } bx\,, \quad \text{arc.tang.}\frac{b(\beta-\alpha)}{b^2+\alpha\beta} \text{ in } \frac{b(\beta-\alpha)}{b^2+\alpha\beta}$$

über, und es ergiebt sich:

$$\int_0^\infty (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\, dx = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\,,$$

welches mit bekannten Resultaten übereinstimmt.

Läßt man endlich in der Gleichung (59)

$$e^{-x} \text{ in } x\,, \text{ also } x \text{ in } -\log.x \text{ und } dx \text{ in } -\frac{dx}{x}$$

übergehen, so erhält man zunächst:

$$\int_1^0 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\log.x}\, dx = \log.\frac{\beta}{\alpha}\,,$$

und, mit Zuziehung der Gleichung (4) Nr. 32,

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\log.x}\, dx = \log.\frac{\alpha}{\beta}\,. \qquad (6.$$

Alle hier aufgestellten Gleichungen bestehen nur für positive Werthe von α und β.

160. Die Gleichung (G) Nr. 155 gestattet die Aufstellung folgender Gleichung:

$$\int_0^\infty \Big\{\int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-a(1+x^n)}\, dx\Big\}\, da = \int_0^\infty \Big\{\int_0^\infty e^{-a(1+x^n)}\, da\Big\}\, x^{m-1}\, dx\,.$$

Nun ist

$$\int e^{-a(1+x^n)}\, da = -\frac{e^{-a(1+x^n)}}{1+x^n}\,,$$

daher hat man:

$$\int_0^\infty e^{-a(1+x^n)}\, da = \frac{1}{1+x^n}\,,$$

und die vorgelegte Gleichung geht in folgende über:

$$\int_0^\infty \Big\{\int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-a(1+x^n)}\, dx\Big\}\, da = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{1+x^n}\,;$$

ferner hat man, wenn m und n reelle, positive Größen sind, die der Bedingung $m < n$ genügen, nach Nr. 145, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n}},$$

daher ist auch:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x^{m-1} e^{-a(1+x^n)} dx \right\} da = \frac{\pi}{n \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n}}.$$

Fassen wir nun das Integrale

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-a(1+x^n)} dx$$

ins Auge, und lassen in demselben ax^n in x^n übergehen, so bleiben, wenn a positiv ist, die Integrationsgrenzen ungeändert, und man hat:

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-a(1+x^n)} dx = \frac{e^{-a}}{\sqrt[n]{a^m}} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx,$$

daher geht auch die vorige Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx \right\} \frac{e^{-a}}{\sqrt[n]{a^m}} da = \frac{\pi}{n \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n}}.$$

Läßt man in dieser Gleichung a in a^n übergehen, so werden, wenn n positiv gedacht wird, die auf a Bezug habenden Integrationsgrenzen unverändert bleiben, und diese Gleichung geht alsdann in folgende über:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx \right\} a^{n-m-1} e^{-a^n} da = \frac{\pi}{n^2 \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n}};$$

vertauscht man noch n in $n+m$, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^{n+m}} dx \right\} a^{n-1} e^{-a^{n+m}} da = \frac{\pi}{(n+m)^2 \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n+m}}.$$

Offenbar wird sich der Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^{n+m}} dx,$$

wo m nothwendig einen positiven Werth haben muß, als eine Function von n und m herausstellen; wenn man demnach folgende Gleichung feststellt:

$$\int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-x^p}\, dx = f(m, p)\ , \tag{a}$$

wo der Ausdruck rechter Hand vom Gleichheitszeichen irgend eine Function von m und p anzeigt, so geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$f(m, n+m) \int_0^\infty a^{n-1}\, e^{-a^{n+m}}\, da = \frac{\pi}{(n+m)^2 \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n+m}}\ ;$$

und wenn abermals die Gleichung (a) zugezogen wird, hat man:

$$f(m, n+m) \cdot f(n, m+n) = \frac{\pi}{(n+m)^2 \operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n+m}}\ ;$$

es ist aber

$$\operatorname{Sin.} \frac{m\pi}{n+m} = \operatorname{Sin.} \frac{n\pi}{m+n}\ ,$$

daher hat man auch:

$$f(m, n+m) \cdot f(n, m+n) = \frac{\pi}{(n+m)^2 \operatorname{Sin.} \frac{n\pi}{n+m}}\ ;$$

werden diese zwei Gleichungen addirt, so ergiebt sich:

$$f(m, n+m) \cdot f(n, m+n) = \frac{\pi}{(n+m)^2 \operatorname{Cos.} \frac{n-m}{n+m} \cdot \frac{\pi}{2}}\ , \tag{b}$$

oder auch, wenn n—m in 2m und n+m in 2n umgesetzt wird,

$$f(n+m, 2n) \cdot f(n-m, 2n) = \frac{\pi}{4n^2 \operatorname{Cos.} \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}}\ . \tag{c}$$

Jede dieser Gleichungen stellt einen Zusammenhang zweier durch die Gleichung (a) vorgestellten bestimmten Integralien dar, so, daß zur Kenntniß eines derselben die des andern unerläßlich erscheint.

Blos der Fall $m = o$, der die Gleichung (c) in folgende verwandelt:

$$[f(n, 2n)]^2 = \frac{\pi}{4n^2}\ ,$$

woraus

$$f(n, 2n) = \frac{1}{2n} \sqrt{\pi}$$

gezogen wird, führt mit Zuziehung der Gleichung (a) auf folgende Integralbestimmung,

$$\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x^{2n}}\, dx = \frac{1}{2n} \sqrt{\pi}\ , \tag{61}$$

die für alle positiven Werthe von n besteht.

Die zwei besonderen Fälle $n = 1$ und $n = \frac{1}{2}$ wollen wir, da dieselben im nächstfolgenden §. öfters zur Sprache kommen werden, hier noch aufnehmen.

Wird nämlich $n = 1$ und x in $x\sqrt{a}$ umgesetzt, so giebt diese Gleichung folgende:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,; \qquad (62)$$

und wenn $n = \frac{1}{2}$ und x in ax umgetauscht wird, hat man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \qquad (63)$$

Weitere Folgerungen aus den allgemeinen Gleichungen (b) und (c) zu ziehen, versparen wir auf das nächstfolgende Kapitel.

161. Es seien auch folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\pi \left\{\int_0^1 \frac{ydy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x}\right\}dx = \int_0^1 \left\{\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x}\right\}ydy\,,$$

$$\int_0^\pi \left\{\int_0^1 \frac{dy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x}\right\}Cos.xdx = \int_0^1 \left\{\int_0^\pi \frac{Cos.xdx}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x}\right\}dy$$

zur Ableitung der Werthe bestimmter Integralausdrücke vorgelegt.

Führen wir zuerst die rechts von den Gleichheitszeichen angezeigten Integrationen aus.

Man hat nach Gleichung (131) Nr. 78:

$$\int \frac{dx}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \frac{2}{\sqrt{(1-a^2y^2)^2}}\,.\,arc.tang.\left(\frac{1-ay}{1+ay}\,tang.\,\frac{x}{2}\right) + Const.$$

daher ist, wenn $1 - ay$ positiv verbleibt,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \pm\,\frac{\pi}{1-a^2y^2}\,,$$

wo das Doppelzeichen vom Ausziehen der zweiten Wurzel herrührt.

Diese Ambiguität zu heben, bedenke man, daß das Integrale zwischen den Grenzen o und π als eine Summe positiver Größen erscheint, folglich muß auch der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen positiv sein; und da man $1 - ay$ positiv angenommen hat, so ist nothwendig

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \frac{+\pi}{1-a^2y^2}\,.$$

Wird diese Gleichung mit ydy multiplicirt, und von $y=0$ bis $y=1$ integrirt, so geschieht der Bedingung: $1-ay$ sei positiv, nur dann ein Genüge, wenn man $a<1$ voraussetzt; daher hat man, beim Statthaben dieser Bedingung, die Gleichung:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} \right\} ydy = \frac{\pi}{2a^2} \log.\frac{1}{1-a^2}.$$

Ferner hat man, wegen:

$$\frac{\text{Cos.}x}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} =$$

$$= \frac{1}{2ay}\left(1-\frac{1}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x}\right) - \tfrac{1}{2}ay\,.\,\frac{1}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x},$$

aus denselben Gründen, die wir vorhin geltend machten,

$$\int_0^\pi \frac{\text{Cos.}xdx}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} = \frac{\pi}{2ay}\left(1-\frac{1}{1-a^2y^2}\right) - \tfrac{1}{2}ay\,.\,\frac{\pi}{1-a^2y^2},$$

oder auch:

$$\int_0^\pi \frac{\text{Cos.}xdx}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} = -\frac{a\pi y}{1-a^2y^2},$$

daher hat man, wenn diese Gleichung mit dy multiplicirt, und von $y=0$ bis $y=1$ integrirt wird, die Gleichung:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^\pi \frac{\text{Cos.}xdx}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} \right\} dy = \frac{\pi}{2a} \log.(1-a^2).$$

Es gehen somit die vorgelegten zwei Gleichungen, bei der Annahme $a<1$, in folgende über:

$$\int_0^\pi \left\{ \int_0^1 \frac{ydy}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} \right\} dx = \frac{\pi}{2a^2} \log.\frac{1}{1-a^2},$$

$$\int_0^\pi \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{1+a^2y^2+2ay\,\text{Cos.}x} \right\} \text{Cos.}xdx = \frac{\pi}{2a} \log.(1-a^2).$$

Machen wir uns nunmehr an die Ausmittelung der auf y Bezug habenden Integrationen.

Berücksichtiget man die Gleichung (50) Nr. 51, so hat man:

$$\int \frac{ydy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \frac{1}{2a^2}\log.(1+a^2y^2+2ay\,Cos.x)$$

$$-\frac{1}{a^2}\frac{Cos.x}{Sin.x}.\,arc.tang.\left(\frac{ay+Cos.x}{Sin.x}\right)+Const.$$

daher ist:

$$\int_0^1 \frac{ydy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\log.(1+a^2+2a\,Cos.x) - \frac{1}{a^2}\frac{Cos.x}{Sin.x}.\,arc.tang.\left(\frac{aSin.x}{1+a\,Cos.x}\right);$$

die Gleichung (21) Nr. 44 giebt ferner:

$$\int \frac{dy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \frac{1}{a\,Sin.x}.\,arc.tang.\left(\frac{ay+Cos.x}{Sin.x}\right)+Const.\,,$$

daher hat man auch:

$$\int_0^1 \frac{dy}{1+a^2y^2+2ay\,Cos.x} = \frac{1}{a\,Sin.x}.\,arc.tang.\left(\frac{a\,Sin.x}{1+a\,Cos.x}\right).$$

Es gehen somit die obigen zwei Gleichungen in folgende über:

$$\int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,Cos.x)dx -$$

$$-2\int_0^\pi \frac{Cos.x}{Sin.x}\,arc.tang.\left(\frac{a\,Sin.x}{1+aCos.x}\right)dx = \pi\log.\frac{1}{1-a^2}\,, \qquad (\alpha)$$

$$2\int_0^\pi \frac{Cos.x}{Sin.x}\,arc.tang.\left(\frac{a\,Sin.x}{1+a\,Cos.x}\right)dx = \pi\log.(1-a^2)\,; \qquad (\beta)$$

und durch Addition derselben erhält man:

$$\int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,Cos.x)\,dx = 0\,. \qquad (64)$$

Aus dieser Gleichung, die nur für jene Werthe von a besteht, welche numerisch kleiner als die Einheit sind, kann man auch den Werth des bestimmten Integrals linker Hand vom Gleichheitszeichen, falls a die Einheit übertrifft, wie folgt, ableiten.

Bezeichnet man nämlich den Werth dieses Integrals, bei der Annahme $a>1$, durch f(a), so hat man, vermöge der Gleichung (64),

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = 0\,,$$

läßt man demnach in der Gleichung:

$$f(a) = \int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx\;,$$

a in $\frac{1}{a}$ übergehen, so hat man:

$$o = \int_0^\pi \log.\left(1+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\,\mathrm{Cos}.x\right)dx\;,$$

oder auch:

$$o = \int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)dx - \log.a^2\int_0^\pi dx\;;$$

woraus für $a > 1$ die complementäre zur Gleichung (64), nämlich

$$\int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = \pi\log.a^2 \qquad (65)$$

erhalten wird.

Für $a=1$, reduciren sich beide Gleichungen (64) und (65) in:

$$\int_0^\pi \log.(2+2\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = o\;,$$

woraus

$$\int_0^\pi \log.(1+\mathrm{Cos}.x)\,dx = -\pi\log.2 \qquad (66)$$

erhalten wird; läßt man in dieser Gleichung x in $\pi - x$ übergehen, so hat man auch:

$$\int_0^\pi \log.(1-\mathrm{Cos}.x)\,dx = -\pi\log.2\;; \qquad (67)$$

und wenn diese zwei Gleichungen addirt werden, erhält man:

$$\int_0^\pi \log.\mathrm{Sin}.x\,dx = -\pi\log.2\;. \qquad (68)$$

Durch theilweises Integriren kann man aus der Gleichung (3) einige nicht uninteressante Resultate gewinnen.

Setzt man nämlich in die Gleichung (4) Nr. 38:

$$F(x) = \mathrm{arc.tang}.\frac{a\,\mathrm{Sin}.x}{1+a\,\mathrm{Cos}.x} \text{ und } f(x) = \log.\mathrm{Sin}.x\;,$$

wodurch

$$d.F(x) = \frac{a^2+a\,\mathrm{Cos}.x}{1+2a\,\mathrm{Cos}.x+a^2}\,dx \text{ und } d.f(x) = \frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Sin}.x}\,dx$$

erhalten wird, so hat man:

$$\int\frac{\mathrm{Cos}.x}{\mathrm{Sin}.x}\,\mathrm{arc.tang}.\left(\frac{a\,\mathrm{Sin}.x}{1+a\,\mathrm{Cos}.x}\right)dx + \int\frac{a^2+a\,\mathrm{Cos}.x}{1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x}\,\log.\mathrm{Sin}.x\,dx =$$

$$= \mathrm{arc.tang}.\left(\frac{a\,\mathrm{Sin}.x}{1+a\,\mathrm{Cos}.x}\right)\log.\mathrm{Sin}.x\;;$$

werden diese Integralien von $x = o$ bis $x = \pi$ genommen, und bedenkt man, daß beim unendlichen Abnehmen der Größe ω die Ungleichheit:

$$\text{arc.tang.}\,\omega < \omega$$

stattfindet, und daß man ferner die Grenzgleichung:

$$\text{Lim:}\ \omega \log.\omega = o$$

hat, wo das Grenzzeichen auf das unendliche Abnehmen von ω bezogen wird, so ergiebt sich, mit Zuziehung der Gleichung (β), folgende Gleichung:

$$\int_0^\pi \frac{a^2 + a\,\text{Cos.}x}{1 + a^2 + 2a\,\text{Cos.}x} \log.\text{Sin.}x\,dx = \tfrac{\pi}{2} \log.\frac{1}{1-a^2},$$

die auch, wie folgt, gestellt werden kann:

$$\int_0^\pi \log.\text{Sin.}x\,dx - (1-a^2) \int_0^\pi \frac{\log.\text{Sin.}x}{1+a^2+2a\,\text{Cos.}x} dx = \pi \log.\frac{1}{1-a^2}.$$

Mit Zuziehung der Gleichung (68) erhält man demnach:

$$\int_0^\pi \frac{\log.\text{Sin.}x}{1+a^2+2a\,\text{Cos.}x} dx = \frac{\pi}{1-a^2} \log.\left(\frac{1-a^2}{2}\right), \tag{69}$$

welche Gleichung für alle Werthe von a, die numerisch kleiner als die Einheit sind, besteht. Verfährt man mit dieser, wie oben mit der Gleichung (64), so hat man:

$$\int_0^\pi \frac{\log.\text{Sin.}x}{1+a^2+2a\,\text{Cos.}x} dx = \frac{\pi}{a^2-1} \log.\left(\frac{a^2-1}{2a^2}\right), \tag{70}$$

die nur für jene Werthe von a besteht, welche numerisch größer als die Einheit sind.

---

§. V.

Anwendung aller bis jetzt aufgeführten Integrationsmethoden und ohne Ende fortlaufender convergenten Reihen bei der Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralausdrücke.

162. Die Gleichung (62) Nr. 160, die für alle positiven Werthe

von a besteht, giebt, wenn dieselbe p mal nacheinander in Bezug auf a differenzirt wird, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{2p}\, e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{1.3.5.7\, .\, .\, .\, 2p-1}{2^p\, a^p} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,;$$

wird diese Gleichung mit:

$$\frac{(-1)^p}{1.2.3.4.5.\, .\, .\, .\, 2p} = \frac{(-1)^p}{1.3.5.7.\, .\, .\, .\, (2p-1)\, .\, 1.2.3.4.\, .\, .\, .\, p.2^p}$$

multiplicirt, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \frac{(-1)^p\, x^{2p}\, e^{-ax^2}}{1.2.3.4.5.\, .\, .\, .\, 2p}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{(-1)^p}{1.2.3.4.\, .\, .\, .\, p(4a)^p} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,;$$

setzt man hier nach und nach:

$$p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .\ .\ .\ .\ n\,,$$

und addirt die so erzeugten Gleichungen zu der anfangs citirten Gleichung (62), so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \, .\, .\, .\, + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\, .\, .\, .\, 2n} \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4a} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{1}{4a}\right)^3 + .\, .\, + \frac{(-1)^n}{1.2.3\, .\, .\, n}\left(\frac{1}{4a}\right)^n \right\} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Versetzt man nun in dieser Gleichung die ganze und positive Zahl n in den Zustand des unendlichen Wachsens, so ergiebt sich sofort:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, \mathrm{Cos}.x\, dx = \tfrac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

aus welcher auch, durchs Umsetzen von x in bx und von a in $\frac{a}{b^2}$ folgende allgemeine Gleichung hervorgeht

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, \mathrm{Cos}.bx\, dx = \tfrac{1}{2}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \quad (\ldots$$

die für alle reellen Werthe von b und für alle positiven, reellen Werthe von a besteht.

163. Dieselbe, den Resultaten der vorangehenden Nr. zu Grunde liegende Gleichung (62) führt auch auf dem Wege der Ableitung zum Werthe eines nicht uninteressanten bestimmten Integralausdruckes; da jedoch der hierbei befolgte Gang, wie aus den Exercices von Cauchy erhellet, ein viel allgemeineres Resultat hervorruft,

so theilen wir solches zuerst mit, woraus dann, als besonderer Fall, das beabsichtigte Integrale gefolgert werden soll.

Wenn durch $f(x^2)$ irgend eine Function von x^2 vorgestellt und

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\, dx \qquad (\alpha)$$

gesetzt wird, so läßt sich auf dem Wege der Ableitung, wenn nämlich:

$$x \text{ in } x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}$$

umgesetzt wird, wo a und b positive, reelle Größen vorstellen, der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax^2 + \frac{b}{x^2} - 2\sqrt{ab})\, dx$$

als abhängig von y darstellen.

Wird diese angezeigte Umformung mit der Gleichung (α) vorgenommen, oder besser, setzt man in (α)

$$x = z\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{z}, \qquad (\beta)$$

wodurch entweder

$$z = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4\sqrt{ab}}}{2\sqrt{a}}, \qquad (\gamma)$$

oder

$$z = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4\sqrt{ab}}}{2\sqrt{a}} \qquad (\delta)$$

erhalten wird, so giebt die Gleichung (β):

für $z = 0$, $x = -\infty$, und

für $z = \infty$, $x = +\infty$,

und da die Gleichung (γ) mit diesen zwei Ergebnissen übereinstimmt, die Gleichung (δ) aber denselben zuwider läuft, so verwerfen wir diese letztere, und erklären uns für das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (β) und (γ), vermöge welcher dann die Gleichung (α) in folgende umgeformt erscheint:

$$y = \sqrt{a} \int_0^{\infty} f(az^2 + \frac{b}{z^2} - 2\sqrt{ab})\, dz$$

$$+ \sqrt{b} \int_0^{\infty} f(az^2 + \frac{b}{z^2} - 2\sqrt{ab}) \frac{dz}{z^2};$$

bedenkt man die Gleichung:

$$\sqrt{a}\int_0^\infty f(az^2+\frac{b}{z^2}-2\sqrt{ab})\,dz = \sqrt{b}\int_0^\infty f(az^2+\frac{b}{z^2}-2\sqrt{ab})\frac{dz}{z^2},$$

wo der Ausdruck rechts aus dem Ausdruck links vom Gleichheitszeichen hervorgeht, wenn in letzterm z in $\frac{1}{z}\sqrt{\frac{b}{a}}$ umgesetzt wird, so hat man auch:

$$y = 2\sqrt{a}\int_0^\infty f(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})\,dx\ ,$$

in der man x statt z gesetzt hat.

Wird hier noch x in $-x$ umgesetzt, wodurch auch:

$$y = 2\sqrt{a}\int_{-\infty}^0 f(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})\,dx$$

erhalten wird, so ergiebt sich durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichung:

$$y = \sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})\,dx\ ,$$

und mit Zuziehung der Gleichung (α) hat man auch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,dx\ , \qquad (72)$$

welche die verlangte und angekündigte Gleichung ist, aus der auch

$$\int_0^\infty f(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty f(x^2)\,dx \qquad (73)$$

gefolgert werden kann. In beiden Gleichungen stellen a und b beliebige, positive und reelle Größen vor.

Wird, um einen besondern Fall vor Augen zu haben,

$$f(x^2) = e^{-x^2}$$

vorausgesetzt, so giebt die Gleichung (73):

$$\int_0^\infty e^{-(ax^2+\frac{b}{x^2}-2\sqrt{ab})}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\ ,$$

und die oben angeführte Gleichung (62) giebt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ,$$

daher hat man:

$$\int_0^\infty e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{-2\sqrt{ab}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ , \qquad (74)$$

welche die anfangs dieser Nr. erwähnte Gleichung ist, die man auch unmittelbar aus der Gleichung (62) hätte ableiten können.

164. Gemäß dem im vorangehenden §. Mitgetheilten ist man zur Aufstellung folgender Gleichung berechtiget:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty 2ae^{-a^2(1+x^2)} \mathrm{Cos.}bx\,dx \right\} da = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty 2ae^{-a^2(1+x^2)} \mathrm{Cos.}bx\,da \right\} dx\,,$$

der man auch folgende Form geben kann:

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \mathrm{Cos.}bx\,dx \right\} 2ae^{-a^2}\,da = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty 2ae^{-a^2(1+x^2)}\,da \right\} \mathrm{Cos.}bx\,dx\,.$$

Nun hat man nach Gleichung (71) Nr. 162

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \mathrm{Cos}\,bx\,dx = \frac{1}{2a}\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}\,;$$

ferner hat man die unbestimmte Integralgleichung:

$$\int 2ae^{-a^2(1+x^2)}\,da = -\frac{e^{-a^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,,$$

aus welcher

$$\int_0^\infty 2ae^{-a^2(1+x^2)}\,da = \frac{1}{1+x^2}$$

gefolgert wird, daher geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(a^2+\frac{b^2}{4a^2}\right)}\,da = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}bx}{1+x^2}\,dx\,,$$

die Gleichung (74) der vorangehenden Nr. giebt:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2+\frac{b^2}{4a^2}\right)}\,da = \tfrac{1}{2}e^{-b}\sqrt{\pi}\,,$$

folglich hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}bx\,dx}{1+x^2} = \tfrac{\pi}{2}e^{-b}\,;$$

geht hier noch x in ax und b in $\frac{b}{a}$ über, so hat man viel allgemeiner:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}bx\,dx}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2a}\,e^{-\frac{b}{a}}\,, \qquad (75)$$

welche für alle positiven und reellen Werthe von a und b besteht.

165. Die Gleichung (63) Nr. 160 kann man auch, wie folgt, stellen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}\,.\,a^{-\frac{1}{2}}\,;$$

differenzirt man diese Gleichung p mal nach einander in Bezug auf a, so erhält mau:

$$\int_0^\infty \frac{x^p e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} . \frac{1.3.5.7. \ldots (2p-1)}{2^p a^p} . a^{-\frac{1}{2}},$$

aus welcher sehr leicht die folgenden zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{(-1)^{p-1} x^{2p-1} e^{-ax}}{1.2.3.4 \ldots (2p-1)} . \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} . \frac{1.3.5.7 \ldots (4p-3)}{2.4.6.8 \ldots (4p-2)} . \frac{(-1)^{p-1} a^{-\frac{1}{2}}}{a^{2p-1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{(-1)^p x^{2p} e^{-ax}}{1.2.3.4 \ldots 2p} . \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} . \frac{1.3.5.7 \ldots (4p-1)}{2.4.6.8 \ldots 4p} . \frac{(-1)^p a^{-\frac{1}{2}}}{a^{2p}}$$

gefolgert werden. Wird in der ersten dieser Gleichungen:

$$p = 1, \quad p = 2, \quad p = 3, \quad \ldots \quad p = n$$

gesetzt, und die Summe der so erhaltenen Gleichungen genommen; werden ferner dieselben Werthe für p in die zweite dieser Gleichungen eingesetzt, und wird die Summe derselben zur vorgelegten Gleichung addirt, so ergeben sich, mit Beachtung der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{2k-1} &= -\frac{1.3.5.7 \ldots (4k-3)}{2.4.6.8 \ldots (4k-2)}, \\ \binom{-\frac{1}{2}}{2k} &= +\frac{1.3.5.7 \ldots (4k-1)}{2.4.6.8 \ldots 4k}, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

die für alle ganzen und positiven Werthe von k bestehen, folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \left\{ x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{1.2.3. \ldots (2n-1)} \right\} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= - \left\{ \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{1}{a} - \binom{-\frac{1}{2}}{3} \frac{1}{a^3} + \binom{-\frac{1}{2}}{5} \frac{1}{a^5} - \ldots (-1)^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{2n-1} \frac{1}{a^{2n-1}} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2.3 \ldots 2n} \right\} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= + \left\{ 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{1}{a^2} + \binom{-\frac{1}{2}}{4} \frac{1}{a^4} - \ldots (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{2n} \frac{1}{a^{2n}} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{a}} .$$

Versetzt man nun n in den Zustand des unendlichen Wachsens, und erklärt a numerisch größer als die Einheit, so gehen diese zwei Gleichungen in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{i}{a}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{a}}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{i}{a}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{a}}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

wo der Kürze wegen $i = \sqrt{-1}$ gesetzt wurde; reducirt man aber die Ausdrücke rechts von den Gleichheitszeichen, so verschwinden die imaginären Bestandtheile, und man erhält:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-a}{1+a^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{1+a^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen, die nur für $a > 1$ abgeleitet worden sind, x in bx und ab in a um, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Sin}.bx}{\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Cos}.bx}{\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}\right\}\quad(76)$$

welche Gleichungen für alle reellen und positiven Werthe von a und b, jedoch immer $b < a$, abgeleitet, also vor der Hand auch nur unter dieser Beschränkung als zulässig angesehen werden dürfen.

Daß aber diese Gleichungen unbeschränkt, für alle reellen und positiven Werthe von a und b stattхaben, werden wir in der folgenden Nr. einleiten, und in der nächst darauf folgenden Nr. zu begründen suchen.

166. Nach §. IV Nr. 155 Gleichung (G) darf man die folgenden zwei Gleichungen aufstellen:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-xa^2}\,da\right\}\mathrm{Cos}.bx\,dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-xa^2}\,\mathrm{Cos}.bx\,dx\right\}da,$$

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-xa^2}\,da\right\}\mathrm{Sin}.bx\,dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-xa^2}\,\mathrm{Sin}.bx\,dx\right\}da;$$

setzt man in den Gleichungen (53) Nr. 159 a in a^2 um, so gehen dieselben über in:

$$\int_0^\infty e^{-xa^2}\,\mathrm{Cos}.bx\,dx = \frac{a^2}{b^2+a^4},$$

$$\int_0^\infty e^{-xa^2}\,\mathrm{Sin}.bx\,dx = \frac{b}{b^2+a^4};$$

vertauscht man ferner in (62) Nr. 160 a in x, so hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-xa^2}\,da = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}};$$

daher gehen die vorgelegten zwei Gleichungen über in:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.bx}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{a^2da}{b^2+a^4},$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.bx}{\sqrt{x}} = b\int_0^\infty \frac{da}{b^2+a^4}.$$

Wenn in den Integralausdrücken rechts der Gleichheitszeichen a in $a\sqrt{b}$ umgesetzt wird, so hat man auch:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.bx}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty \frac{a^2da}{1+a^4},$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.bx}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty \frac{da}{1+a^4};$$

berücksichtiget man daher noch die Gleichung (13) Nr. 141, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.bx}{\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2b}},\\ \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.bx}{\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.\end{aligned}\right\}$$

Von diesen zwei Gleichungen, die für alle reellen und positiven Werthe von b bestehen, und die unabhängig von den Gleichungen (76) der vorhergehenden Nr. erhalten worden sind, werden wir in der nächstfolgenden Nr. ausgehen, um die allgemeine Gültigkeit dieser Gleichungen (76) darzuthun.

167. Durch successives Differenziren der Gleichungen (77) der vor-

angehenden Nr. nach der allgemeinen Größe b, gelangt man, mit Berücksichtigung der Gleichungen (α) Nr. 165, auf folgende vier Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p-1}\,\mathrm{Cos}.bx}{1.2.3\ldots(2p-1)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{p-1}\binom{-\frac{1}{2}}{2p-1}\cdot\frac{1}{b^{2p-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\,\mathrm{Cos}.bx}{1.2.3\ldots 2p}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{p}\binom{-\frac{1}{2}}{2p}\cdot\frac{1}{b^{2p}}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p-1}\,\mathrm{Sin}.bx}{1.2.3\ldots(2p-1)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{p}\binom{-\frac{1}{2}}{2p-1}\cdot\frac{1}{b^{2p-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\,\mathrm{Sin}.bx}{1.2.3\ldots 2p}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{p}\binom{-\frac{1}{2}}{2p}\cdot\frac{1}{b^{2p}}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Man setze nun in die zweite dieser Gleichungen statt p nach und nach alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis ∞; addire die erhaltenen Gleichungen zur ersten der Gleichungen (77) vorhergehender Nr.; von dieser Summe ziehe man die Summe jener Gleichungen ab, die die erste der hier aufgestellten vier Gleichungen darbietet, wenn gleichfalls alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis ∞ statt p angenommen wird: so findet man, mit Beachtung der unendlichen Reihe, welche den Werth von e^{-x} darstellt, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Cos}.bx}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{1-\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{b^2}+\binom{-\frac{1}{2}}{4}\frac{1}{b^4}-\binom{-\frac{1}{2}}{6}\frac{1}{b^6}+\ldots\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$
$$-\left\{\binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{b}-\binom{-\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{b^3}+\binom{-\frac{1}{2}}{5}\frac{1}{b^5}-\ldots\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Verfährt man auf dieselbe Weise mit der dritten und vierten der oben aufgestellten vier Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Sin}.bx}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{1-\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{b^2}+\binom{-\frac{1}{2}}{4}\frac{1}{b^4}-\binom{-\frac{1}{2}}{6}\frac{1}{b^6}+\ldots\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$
$$+\left\{\binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{b}-\binom{-\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{b^3}+\binom{-\frac{1}{2}}{5}\frac{1}{b^5}-\ldots\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Bei der Annahme $b > 1$ hat man, wenn $i=\sqrt{-1}$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{b}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{i}{b}}}\right)=1-\binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{b^2}+\binom{-\frac{1}{2}}{4}\frac{1}{b^4}-\binom{-\frac{1}{2}}{6}\frac{1}{b^6}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{b}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{i}{b}}}\right)=\binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{b}-\binom{-\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{b^3}+\binom{-\frac{1}{2}}{5}\frac{1}{b^5}-\ldots,$$

daher hat man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Cos.}bx}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+i}{\sqrt{1+\frac{i}{b}}}+\frac{1-i}{\sqrt{1-\frac{i}{b}}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Sin.}bx}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-i}{\sqrt{1+\frac{i}{b}}}+\frac{1+i}{\sqrt{1-\frac{i}{b}}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

und nach geschehener Reduction der Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Cos.}bx}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}+1}{1+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,\mathrm{Sin.}bx}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{1+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

In diesen Gleichungen, die unter der Annahme $b > 1$ gewonnen worden sind, setze man x in ax und ab in b um, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Cos.}bx}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,\mathrm{Sin.}bx}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

welche für alle reellen und positiven Werthe von a und b bestehen, für die man $b > a$ hat; und da diese Gleichungen mit den Gleichungen (76) in völliger Uebereinstimmung sind, so fließt sofort die Richtigkeit der diese Gleichungen betreffenden Behauptung. (Schlußbemerkung zu Nr. 165.)

168. Die Gleichungen (77) Nr. 166 führen, auf dem Wege der Ableitung, noch auf zwei beachtenswerthe bestimmte Integralausdrücke, die wir hier entwickeln wollen.

Setzt man in diesen Gleichungen $b = 1$, und läßt man x in x^2 übergehen, so erhält man:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{Sin.}(x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

wo $\mathrm{Cos.}(x^2)$ den Cosinus und $\mathrm{Sin.}(x^2)$ den Sinus von x^2 vorstellen.

Geht hier x in $-x$ über, so hat man auch:

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{Cos.}(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_{-\infty}^0 \mathrm{Sin.}(x^2)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Cos.}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sin.}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Geht in diesen Gleichungen x in $a+bx$ über, wo a und b reelle, nicht unendlich großwerdende Größen sind, und tritt überdieß noch b als positive Größe auf, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Cos.}(a^2+b^2x^2)\mathrm{Cos.}2abxdx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sin.}(a^2+b^2x^2)\mathrm{Sin.}2abxdx = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sin.}(a^2+b^2x^2)\mathrm{Cos.}2abxdx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Cos.}(a^2+b^2x^2)\mathrm{Sin.}2abxdx = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Stellt man durch $f(x^2)$ irgend eine Function von x^2 vor, so überzeugt man sich sehr bald von der Richtigkeit folgender zwei Gleichungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{Sin.}\alpha x\, dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\, dx = 2\int_0^\infty f(x^2)\,\mathrm{Cos.}\alpha x\, dx,$$

wo α was immer für eine reelle Größe bedeutet, daher gehen die vorigen zwei Gleichungen in folgende über:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(a^2+b^2x^2)\,\mathrm{Cos.}2abx\, dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}(a^2+b^2x^2)\,\mathrm{Cos.}2abx\, dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Löst man nun $\mathrm{Cos.}(a^2+b^2x^2)$ und $\mathrm{Sin.}(a^2+b^2x^2)$ auf, so findet man auch sehr bald die folgenden zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty \text{Cos.}(b^2x^2)\,\text{Cos.}2abx\,dx = \frac{1}{2b}\left\{\text{Cos.}(a^2)+\text{Sin.}(a^2)\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

$$\int_0^\infty \text{Sin.}(b^2x^2)\,\text{Cos.}2abx\,dx = \frac{1}{2b}\left\{\text{Cos.}(a^2)-\text{Sin.}(a^2)\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \text{Cos.}(mx^2)\,\text{Cos.}nx\,dx &= \tfrac{1}{2}\left\{\text{Cos.}\left(\frac{n^2}{4m}\right)+\text{Sin.}\left(\frac{n^2}{4m}\right)\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2m}}\,,\\ \int_0^\infty \text{Sin.}(mx^2)\,\text{Cos.}nx\,dx &= \tfrac{1}{2}\left\{\text{Cos.}\left(\frac{n^2}{4m}\right)-\text{Sin}\left(\frac{n^2}{4m}\right)\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2m}}\,,\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

welche die angekündigten zwei Gleichungen sind, die, wenn nur m positiv vorausgesetzt ist, für alle reellen Werthe von m und n bestehen.

169. Die im vorangehenden §. zur Anwendung gebrachte Integrationsmethode, namentlich der Theil, wo durch Integration nach einer allgemeinen Constante die Werthe neuer Integralien gewonnen werden, führt auf zwei Sätze, die, ihres hohen Grades von Allgemeinheit wegen, mit gutem Erfolge in der bestimmten Integralrechnung zur Anwendung gebracht werden können, und deßhalb mitgetheilt zu werden verdienen.

I. Wenn unter $\varphi(x)$ irgend eine continuirliche Function von x, und durch a eine allgemeine Größe vorgestellt wird, und es besteht die Gleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,\text{Cos.}ax\,dx = F(a)\,,\qquad(\alpha)$$

wo F(a) eine Function der allgemeinen Größe a darstellt, so kann auf diese Gleichung das in Nr. 155 II mitgetheilte Integrationsverfahren in Anwendung gebracht werden.

Multiplicirt man diese Gleichung mit Cos.ya da, wo y ebenfalls eine allgemeine oder variable Größe vorstellt, und integrirt man dann in Bezug auf a, von $a=0$ bis $a=\infty$, so ergiebt sich zunächst folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \varphi(x)\,\text{Cos.}ax\,dx\right\}\text{Cos.}ya\,da = \int_0^\infty F(a)\,\text{Cos.}ya\,da\;;$$

welche, vermöge der Gleichung (G) Nr. 155, in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \text{Cos.}ax\,\text{Cos.}ay\,da\right\}\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty F(a)\,\text{Cos.}ya\,da\,,$$

oder auch in:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x-y)a\,da\right\}\varphi(x)dx + \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x+y)a\,da\right\}\varphi(x)dx =$$

$$= 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Cos.}ya\,da\,. \qquad (\beta)$$

Man hat, wenn p was immer für eine endliche und reelle Größe bedeutet, nach der zweiten der Gleichungen (47) Nr. 156,

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}pa\,da = o\;;$$

erklärt man daher die neu eingeführte Größe y als reell, so wird man, für alle reellen Werthe von x, die von + oder —y verschieden sind, die erste oder die zweite der folgenden Gleichungen haben:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x-y)a\,da = o\;, \qquad \int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x+y)a\,da = o\;;$$

die oben in Gleichung (β) angezeigten Integrationen nach x erstrecken sich über alle positiven Werthe dieser Größe, daher wird, je nachdem y positiv oder negativ gedacht wird, die erste oder die zweite der zuletzt aufgestellten zwei Gleichungen, wenn x in die Nähe des Werthes von y tritt, als unstatthaft erklärt werden müssen. Erklären wir, der Einfachheit wegen, y als positiv, so besteht die zweite dieser Gleichungen für alle Werthe von x, die zwischen 0 und ∞ enthalten sind; in der ersten dieser Gleichungen hingegen, nähert sich der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen dem Zustande des unendlichen Wachsens, so wie x in die Nähe des Werthes von y tritt: und es besteht diese Gleichung nur insofern, als x verschieden von y gedacht wird.

Dieses vorausgesetzt, geht die obige Gleichung (β) in folgende über:

$$\int_{y-\omega}^{y+\omega} \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos.}(x-y)a\,da\right\}\varphi(x)\,dx = 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Cos.}ya\,da\;,$$

oder auch, vermöge der oben citirten Gleichung (G), in:

$$\int_0^\infty \left\{\int_{y-\omega}^{y+\omega} \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}(x-y)a\,dx\right\}da = 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Cos.}ya\,da\;,$$

wo ω eine unendlich kleinwerdende Größe bedeutet.

Läßt man nun, links vom Gleichheitszeichen, in dem nach x zu vollziehenden bestimmten Integralausdrucke x in y + x übergehen, so geht diese Gleichung in:

$$\int_0^\infty \left\{\int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(y+x)\,\mathrm{Cos.}ax\,dx\right\}da = 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Cos.}ya\,da$$

über, und da die Function $\varphi(x)$ für alle positiven Werthe von x, mit der Eigenschaft der Continuität begabt, vorausgesetzt ward, so kann man:

$$\int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(y+x) \operatorname{Cos}.ax\, dx = \omega\varphi(y) \operatorname{Cos}.a\omega$$

setzen, wodurch, wenn die Function φ von der Größe a unabhängig ist, die obige Gleichung in folgende:

$$\varphi(y)\omega \int_0^\infty \operatorname{Cos}.a\omega\, da = 2\int_0^\infty F(a) \operatorname{Cos}.ya\, da\ ,$$

umgesetzt erscheint. Das Product aus der unendlich kleinwerdenden Größe ω in den unendlich großwerdenden Werth des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \operatorname{Cos}.a\omega da$ bietet eine unbestimmte Größe dar, der Umstand jedoch, daß dieses Product unabhängig von der speciellen Beschaffenheit der Function $\varphi(x)$ sein muß, erleichtert die Ausmittelung derselben. Stellt man nämlich, vor der Hand, dieses unbestimmte Product durch M dar, wodurch die obige Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty F(a) \operatorname{Cos}.ya\, da = \frac{M}{2}\varphi(y)\ , \qquad (\gamma)$$

so wird diese, von der speciellen Beschaffenheit der Function $\varphi(x)$ unabhängige Größe M, wie folgt, bestimmt.

Man setze in der Gleichung (α)

$$\varphi(x) = e^{-x}$$

so giebt dieselbe, mit Zuziehung der ersten unter den Gleichungen (53) Nr. 159,

$$F(a) = \frac{1}{1+a^2}\ ,$$

wodurch die so eben aufgestellte Gleichung (γ) in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.ya}{1+a^2}\, da = \frac{M}{2} e^{-y}\ ;$$

diese Gleichung mit der in (75) Nr. 164 aufgestellten verglichen, führt auf die identisch sein sollende Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} e^{-y} = \frac{M}{2} e^{-y}\ ,$$

aus welcher

$$M = \pi$$

gefolgert wird. Auf dasselbe Resultat wird man geführt, wenn man in der vorgelegten Gleichung (α)

$$\varphi(x) = e^{-x^2}$$

annimmt; die Gleichung (71) Nr. 162 bietet alsdann

$$F(a) = \tfrac{1}{2}\, e^{-\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

dar, wodurch die Gleichung (γ) in folgende:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4}} \operatorname{Cos.} ya\, da = \frac{M}{2}\, e^{-y^2} ,$$

oder in:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4}} \operatorname{Cos.} ya\, da = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\, e^{-y^2}$$

übergeht, welche, mit derselben Gleichung (71) verglichen, auf:

$$\tfrac{1}{2} e^{-y^2} . 2\sqrt{\pi} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\, e^{-y^2} ,$$

oder auf:

$$M = \pi ,$$

wie vorhin, führt. Es geht sonach die Gleichung (γ) über in:

$$\int_0^\infty F(a) \operatorname{Cos.} ya\, da = \tfrac{\pi}{2} \varphi(y) ,$$

und wir können folgenden Lehrsatz als begründet ansehen:

Stellt $\varphi(x)$ eine von $x = 0$ bis $x = \infty$ continuirliche Function von x vor; bedeutet a eine allgemeine Größe, die in der Function $\varphi(x)$ nicht vorkömmt; und besteht die Gleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(x) \operatorname{Cos.} ax\, dx = F(a) , \qquad \text{(A)}$$

so hat man auch:

$$\int_0^\infty F(x) \operatorname{Cos.} ax\, dx = \tfrac{\pi}{2} \varphi(a) , \qquad \text{(B)}$$

und umgekehrt, wenn F(x) von $x = 0$ bis $x = \infty$ continuirlich und unabhängig von der allgemeinen Größe a ist.

II. Wenn Alles die bisherige Bedeutung beibehält, und wenn folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{Sin}.ax\,dx = F(a)\ , \qquad (\alpha')$$

zu Grunde gelegt wird, so findet man, wenn diese Gleichung mit $\mathrm{Sin}.ya\,da$ multiplicirt und von $a = 0$ bis $a = \infty$ integrirt wird, folgende, der Gleichung (β) in I ganz analoge Gleichung:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos}.(x-y)a\,da\right\}\varphi(x)\,dx - \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos}(x+y)a\,da\right\}\varphi(x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Sin}.ya\,da\ , \qquad (\beta')$$

und durch ähnliche Betrachtungen, wie in I, geht diese Gleichung für alle reellen Werthe von y in folgende über:

$$\int_{y-\omega}^{y+\omega} \left\{\int_0^\infty \mathrm{Cos}.(x-y)a\,da\right\}\varphi(x)\,dx = 2\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Sin}.ya\,da\ ,$$

oder auch zuletzt in:

$$\int_0^\infty F(a)\,\mathrm{Sin}.ya\,da = \frac{M}{2}\,\varphi(y)\ , \qquad (\gamma')$$

wo M eine unbestimmte, von der speciellen Beschaffenheit der continuirlichen Function $\varphi(x)$ unabhängige Größe vorstellt.

Diese Unbestimmtheit zu heben, machen wir folgende Annahme: Es sei

$$\varphi(x) = e^{-x}\ ,$$

so bietet, mit Zuziehung der zweiten der Gleichungen (53) Nr. 159, die Gleichung (α') folgendes Resultat dar:

$$F(a) = \frac{a}{1+a^2}\ ,$$

wodurch die Gleichung (γ') in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.ya}{1+a^2}\,a\,da = \frac{M}{2}\,e^{-y}\ ;$$

differenzirt man die Gleichung (75) Nr. 164 nach b, so geht sie in

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.bx}{1+a^2x^2}\,x\,dx = \frac{\pi}{2a^2}\,e^{-\frac{b}{a}} \qquad (79)$$

über, daher hat man, durch Vergleichung dieser Gleichung mit der vorhergehenden,

$$\frac{M}{2}\,e^{-y} = \frac{\pi}{2}e^{-y}\ ,$$

woraus

$$M = \pi$$

gezogen wird. Substituirt man diesen Werth von M in (γ'), so hat man:

$$\int_0^\infty F(a)\,\text{Sin.}ya\,da = \tfrac{\pi}{2}\varphi(y) ;$$

welche Gleichung den zweiten der angekündigten Lehrsätze begründet, der, wie folgt, lautet:

Wenn $\varphi(x)$ eine von $x=o$ bis $x=\infty$ continuirliche, und von der allgemeinen Größe a unabhängige Function von x ist; und es besteht die Gleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,\text{Sin.}ax\,dx = F(a) , \qquad (A')$$

so hat man auch:

$$\int_0^\infty F(x)\,\text{Sin.}ax\,dx = {}^{\pi}\varphi(a) , \qquad (B')$$

und umgekehrt, wo F(x) in Bezug auf x continuirlich und von a unabhängig ist.

170. Von den so eben festgestellten zwei Sätzen, die Fourier in seiner Wärmelehre zuerst mittheilte, werden wir im Verfolge dieses Werkes mehrere Anwendungen zu geben Gelegenheit finden. Für jetzt mag es hinreichen, wenn wir von jedem dieser Sätze blos einen speciellen Fall zur Anwendung vorführen:

I. Vertauscht man in der Gleichung (56) Nr. 159 α in a und a in $\frac{1}{b}$, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{b}}}{x}\,\text{Sin.}ax\,dx = \text{arc.tang.}ab ;$$

wendet man auf diese Gleichung das Theorem II der vorigen Nr. an, so erhält man:

$$\int_0^\infty \text{arc.tang.}bx\,\text{Sin.}ax\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-\frac{a}{b}} ; \qquad (80)$$

behandelt man den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen nach der sogenannten theilweisen Integration, oder nach der Grundgleichung (4) Nr. 38, wenn daselbst

$$F(x) = \text{arc.tang.}bx \text{ und } d.f(x) = \text{Sin.}ax\,dx$$

angenommen wird, und berücksichtiget man die in Nr. 151 begründeten Grenzgleichungen, so erhält man:

$$\int_0^\infty \text{arc.tang.}bx \,\text{Sin.}ax\,dx = \frac{b}{a}\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}ax\,dx}{1+b^2x^2},$$

welches Ergebniß, verglichen mit der obigen Gleichung (80), auf ein mit der Gleichung (75) Nr. 164 gleichlautendes Resultat führt.

II. Vertauscht man in der ersten der Gleichungen (58) Nr. 159 b in a, wodurch dieselbe in:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,\text{Cos.}ax\,dx = \frac{1}{2}\log.\frac{\beta^2 + a^2}{\alpha^2 + a^2}$$

übergeht, so giebt das Theorem I der vorangehenden Nr.:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \log.\frac{\beta^2 + x^2}{\alpha^2 + x^2}.\,\text{Cos.}ax\,dx = \frac{\pi}{2}.\frac{e^{-\alpha a} - e^{-\beta a}}{a},$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \log.\frac{\beta^2 + x^2}{\alpha^2 + x^2}.\,\text{Cos.}ax\,dx = \frac{\pi}{a}(e^{-\alpha a} - e^{-\beta a}), \qquad (81)$$

welche Gleichung für alle reellen und positiven Werthe von α und β, Null mitbegriffen, besteht.

171. Die Nr. 169 gewonnenen Sätze stellen sich noch allgemeiner dar, wenn man, anstatt von den Gleichungen (α) und (α') daselbst, von den folgenden zwei Gleichungen ausgeht:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^h \varphi(x)\,\text{Cos.}ax\,dx &= F(a), \\ \int_0^h \varphi(x)\,\text{Sin.}ax\,dx &= F'(a), \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha'')$$

wo h nicht nur unendlich großwerdend, sondern auch endlich sein kann.

Verfährt man mit diesen Gleichungen ganz wie a. a. O., so gelangt man auf folgende, mit (γ) und (γ') ganz analogen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty F(a)\,\text{Cos.}ya\,da &= \frac{M}{2}\varphi(y), \\ \int_0^\infty F'(a)\,\text{Sin.}ya\,da &= \frac{M'}{2}\varphi(y), \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma'')$$

wo auch hier M und M' unbestimmte und noch zu ermittelnde Con-

stanten sind. Der einzige Unterschied, der hier vorwaltet, besteht darin, daß die letzten zwei Gleichungen nur für jene Werthe von y bestehen, die numerisch kleiner als h sind, während die oben citirten Gleichungen (γ) und (γ') für alle endlichen, übrigens noch großen Werthe von y bestehen.

Die unbestimmten Größen M und M′ zu ermitteln, nehmen wir die Function $\varphi(x)$ von der Form e^{-x} an. Es geben alsdann die Gleichungen (α''), mit Zuziehung der Gleichungen (150) Nr. 88 Integralrechnung II,

$$F(a) = \frac{-\operatorname{Cos.}ah + a\operatorname{Sin.}ah}{1+a^2}\,e^{-h} + \frac{1}{1+a^2},$$

$$F'(a) = -\frac{\operatorname{Sin.}ah + a\operatorname{Cos.}ah}{1+a^2}\,e^{-h} + \frac{a}{1+a^2};$$

und die Gleichungen (γ'') gehen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{M}{2}e^{-y} &= -e^{-h}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos.}ah\operatorname{Cos.}ay}{1+a^2}\,da + \\
&\quad + e^{-h}\int_0^\infty \frac{a\operatorname{Sin.}ah\operatorname{Cos.}ay}{1+a^2}\,da + \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos.}ay}{1+a^2}\,da, \\
\frac{M'}{2}e^{-y} &= -e^{-h}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}ah\operatorname{Sin.}ay}{1+a^2}\,da - \\
&\quad - e^{-h}\int_0^\infty \frac{a\operatorname{Cos.}ah\operatorname{Sin.}ay}{1+a^2}\,da + \int_0^\infty \frac{a\operatorname{Sin.}ay}{1+a^2}\,da;
\end{aligned}\right\}(\delta'')$$

werden diese Gleichungen addirt und subtrahirt, so erhält man mit Beachtung der Gleichung (75) Nr. 164 und der Gleichung (79) Nr. 169, wie auch des Umstandes, daß $h - y$ positiv sein muß, folgende zwei Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}(M + M')\,e^{-y} = \pi e^{-y},$$

$$\tfrac{1}{2}(M - M')\,e^{-y} = 0,$$

aus welchen

$$M = M' = \pi$$

gezogen wird. Wir sind somit auch zur Aufstellung folgender zwei Sätze berechtiget:

I. Wenn $\varphi(x)$ von $x=o$ bis $x=h$ eine continuirliche Function von x ist; und wenn a eine allgemeine Größe vorstellt, die in der Function $\varphi(x)$ nicht vorkömmt, so hat man bei Feststellung der Gleichung:

$$\int_0^h \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.ax\,dx = F(a)\ , \qquad (A$$

auch die folgende:

$$\int_0^\infty F(x)\,\mathrm{Cos}.ax\,dx = \tfrac{\pi}{2}\varphi(a)\ , \qquad (B$$

welche letztere jedoch nur für jene Werthe von a Bestand hat, die den Unterschied h—a positiv geben.

II. Wenn Alles in der in I gebrauchten Bedeutung auftritt, so besteht mit der Gleichung:

$$\int_0^h \varphi(x)\,\mathrm{Sin}.ax\,dx = F(a)\ , \qquad (A'$$

auch die folgende

$$\int_0^\infty F(x)\,\mathrm{Sin}.ax\,dx = \tfrac{\pi}{2}\varphi(a)\ , \qquad (B'$$

in der der Unterschied h — a gleichfalls positiv sein muß.

Anmerkung. Hat man aber h—a=o, so bieten die obigen Gleichungen (?

$$M = M' = \frac{\pi}{2}$$

dar, und die gefolgerten Gleichungen (B) und (B') gehen in gleicher Ordnung in folgende über:

$$\int_0^\infty F(x)\,\mathrm{Cos}.hx\,dx = \tfrac{\pi}{4}\varphi(h)\ . \qquad (B$$

$$\int_0^\infty F(x)\,\mathrm{Sin}.hx\,dx = \tfrac{\pi}{4}\varphi(h)\ . \qquad (B$$

172. Auch die Coefficienten convergenter und summirbarer Reihen werden zuweilen bei der Ausmittelung der Werthe bestimmter Integralien mit Erfolg benützt, wie man aus der vorliegenden und der folgenden Nr. abnehmen wird.

Die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$1 + \alpha x + \alpha^2x^2 + \alpha^3x^3 + \alpha^4x^4 + \text{in inf.}$$

convergirt gegen die Grenze:

$$\frac{1}{1-\alpha x}\,,$$

wenn αx numerisch kleiner als die Einheit ist.

Gehen wir daher von dieser Annahme aus, und lassen x in $e^{x\sqrt{-1}}$ übergehen, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{1-\alpha\text{Cos.}x-\alpha\sqrt{-1}\text{Sin.}x} = 1+\alpha e^{x\sqrt{-1}} + \alpha^2 e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots \alpha^m e^{mx\sqrt{-1}} + ., \quad \text{(I)}$$

die für alle Werthe von α, welche numerisch kleiner als die Einheit sind, identisch besteht.

Multipliciren wir diese Gleichheit mit $e^{-mx\sqrt{-1}}dx$, und integriren dann beiderseits von $x = o$ bis $x = 2\pi$, so hat man, wegen der Gleichung:

$$\int e^{kx\sqrt{-1}}dx = \frac{1}{k\sqrt{-1}}(\text{Cos.}kx + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}kx) + \text{Const.},$$

die für alle von Null verschiedenen und ganzen Werthe von k auf:

$$\int_0^{2\pi} e^{kx\sqrt{-1}}dx = o$$

führt, folgende Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}dx}{1-\alpha\text{Cos.}x-\alpha\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x} = \alpha^m \int_0^{2\pi} dx,$$

oder auch:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}mx}{1-\alpha\text{Cos.}x-\alpha\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x}\,dx = 2\pi\alpha^m;$$

und wenn links vom Gleichheitszeichen die reellen von den imaginären Theilen gesondert werden, erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx - \alpha\text{Cos.}(m+1)x}{1-2\alpha\text{Cos.}x+\alpha^2}\,dx &= 2\pi\alpha^m, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx - \alpha\text{Sin.}(m+1)x}{1-2\alpha\text{Cos.}x+\alpha^2}\,dx &= o. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Wird nun

$$u_m = \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1-2\alpha\text{Cos.}x+\alpha^2}$$

gesetzt, so bietet die zweite dieser Gleichungen (II) folgende, höchst einfache Recursionsgleichung dar:

$$\alpha u_{m+1} = u_m ;$$

setzt man hier statt m nach und nach die ganzen Zahlen von 1 bis m—1; multiplicirt dann die so erhaltenen Gleichungen mit einander, so ergiebt sich:

$$\alpha^{m-1} u_m = u_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}x\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2} .$$

Es ist aber

$$\int \frac{\text{Sin.}x\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \log.(1 - 2\alpha\text{Cos.}x + \alpha^2) + \text{Const.},$$

daher hat man:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}x\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2} = o ;$$

woraus dann die Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2} = o \qquad (1$$

hervorgeht, die für alle ganzen Zahlenwerthe von m und für alle Werthe von α, die numerisch kleiner als die Einheit sind, abgeleitet wurde; bedenkt man noch, daß man für $\beta > 1$, vermöge dieser Gleichung (a),

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1 - 2.\frac{1}{\beta}\text{Cos.}x + \frac{1}{\beta^2}} = o$$

hat, so überzeugt man sich sehr bald, daß die obige Gleichung (1 sowohl für die Werthe von α, welche numerisch größer, als auch für die, so numerisch kleiner als die Einheit sind, Statt findet.

Für $\alpha = 1$ besteht diese Gleichung deßwegen nicht, weil die un bekannte Integralfunction der Differenzialformel

$$\frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2},$$

für diese Annahme von α, an den beiden Integrationsgrenzen o und 2π die Eigenschaft der Continuität ablegt.

Die erste der obigen Gleichungen (II) bietet, wenn m um eine Einheit verringert und p statt m gesetzt wird, folgende Recursions-gleichung dar:

$$\alpha u_p - u_{p-1} = -2\pi\alpha^{p-1},$$

wo abkürzend

$$u_p = \int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}px\,dx}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.}x + \alpha^2}$$

gesetzt wurde.

Vergleicht man diese Recursionsgleichung mit der allgemeinen (A) Nr. 93, so geht die Gleichung (B) derselben citirten Nr., wegen

$$f(p) = \alpha p^0, \quad f'(p) = -p^0, \quad f''(p) = -2\pi\alpha^{p-1},$$

in folgende über:

$$u_p = \frac{1}{\alpha^p} u_0 - \frac{2\pi}{\alpha^p}(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \ldots + \alpha^{2p-2}),$$

oder auch in:

$$u_p = \frac{1}{\alpha^p} u_0 - \frac{2\pi}{\alpha^p} \cdot \frac{\alpha^{2p} - 1}{\alpha^2 - 1};$$

ferner ist

$$u_0 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\alpha^2-2\alpha\text{Cos.}x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\alpha^2-2\alpha\text{Cos.}x} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\alpha^2+2\alpha\text{Cos.}x},$$

und nach Nr. 78 Gleichung (131) hat man:

$$\int \frac{dx}{1+\alpha^2-2\alpha\text{Cos.}x} = \frac{2}{1-\alpha^2}\,\text{arc.tang.}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,\text{tang.}\,\frac{x}{2}\right) + \text{Const.},$$

$$\int \frac{dx}{1+\alpha^2+2\alpha\text{Cos.}x} = \frac{2}{1-\alpha^2}\,\text{arc.tang.}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,\text{tang.}\,\frac{x}{2}\right) + \text{Const.},$$

daher ist, bei der Annahme $\alpha < 1$,

$$u_0 = \frac{2\pi}{1 - \alpha^2},$$

und wenn in der vorigen Gleichung p in m umgesetzt wird, hat man:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1-2\alpha\text{Cos.}x+\alpha^2} = \frac{2\pi}{1-\alpha^2} \cdot \alpha^m, \tag{b}$$

welche für alle ganzen und positiven Werthe von m und für alle Werthe von α, die numerisch kleiner als die Einheit sind, besteht.

Stellt man durch β eine numerisch größere Zahl als die Einheit vor, so giebt diese Gleichung (b):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1 - \frac{2}{\beta}\text{Cos.}x + \frac{1}{\beta^2}} = \frac{2\pi}{1 - \frac{1}{\beta^2}} \cdot \frac{1}{\beta^m},$$

woraus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1 - 2\beta\,\text{Cos.}x + \beta^2} = \frac{2\pi}{\beta^2 - 1} \cdot \frac{1}{\beta^m} \qquad (c)$$

gezogen wird, die ebenfalls für alle ganzen und positiven Werthe von m, und für jene Werthe von β besteht, welche die Einheit numerisch übertreffen.

Die Gleichung (a), die für alle Werthe von α, die Einheit ausgenommen, stattfindet, kann man, wenn:

$$\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} = a$$

gesetzt wird, wo also a numerisch kleiner als die Einheit ist, auf folgende Form bringen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1 - a\,\text{Cos.}x} = 0\,; \qquad (82)$$

für a = und > 1 hört die unbekannte und unbestimmte Integralfunction links vom Gleichheitszeichen continuirlich zu sein auf, und fällt somit außer dem Bereiche unserer Betrachtungen.

Auf gleichem Wege führen die Gleichungen (b) und (c) auf folgende Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1 - a\,\text{Cos.}x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)^m, \qquad (83)$$

die für alle ganzen und positiven Werthe von m, und für alle Werthe von a, welche numerisch kleiner als die Einheit sind, stattfindet.

Bedenkt man ferner, daß m eine ganze Zahl vorstellt, so findet man aus der letzten Gleichung auch folgende:

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1 - a\,\text{Cos.}x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)^m, \qquad (84)$$

welche für dieselben Werthe von a und m, als die Gleichungen (82) und (83) besteht.

Durch Zerlegen des Ausdruckes:

$$\frac{1}{(1 - a_1\,\text{Cos.}x)(1 - a_2\,\text{Cos.}x)(1 - a_3\,\text{Cos.}x)\;.\;.\;.\;(1 - a_n\,\text{Cos.}x)},$$

in Theilbrüche mit den Nennern

$$1-a_1\,Cos.x,\quad 1-a_2\,Cos.x,\quad 1-a_3\,Cos.x,\quad \ldots\quad 1-a_n\,Cos.x,$$

ist man nunmehr auch folgende bestimmte Integralien:

$$\int_0^{2\pi} \frac{Sin.mx\,dx}{(1-a_1\,Cos.x)(1-a_2\,Cos.x)\ldots(1-a_n\,Cos.x)},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{Cos.mx\,dx}{(1-a_1\,Cos.x)(1-a_2\,Cos.x)\ldots(1-a_n\,Cos.x)}$$

anzugeben im Stande; das erste dieser Integralien bietet mit Zuziehung der Gleichung (82), falls $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$ sämmtlich numerisch kleiner als die Einheit sind, den Nullwerth dar; und das zweite dieser Integralien wird sich bei derselben Voraussetzung über die Werthe von $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$, durch die obige Gleichung (83) bestimmen lassen. Wir übergehen jedoch die Entwickelung dieses bestimmten Integrals, und wollen uns nur noch in folgender Nr. mit der Angabe eines bestimmten Integrals beschäftigen, das in der Folge zur Anwendung kommen wird.

473. Wenn man die Gleichung (I) der vorangehenden Nr. mit $xe^{-mx\sqrt{-1}}dx$ multiplicirt, und von $x = o$ bis $x = 2\pi$ integrirt, so erhält man, wegen

$$\int xe^{kx}dx = \frac{1}{k}\left(x - \frac{1}{k}\right)e^{kx},\ \text{und}\ \int xdx = \frac{x^2}{2},$$

folgende Bestimmungen:

$$\int_0^{2\pi} xe^{kx\sqrt{-1}}dx = \frac{-2\pi\sqrt{-1}}{k},\quad \int_0^{2\pi} xdx = 2\pi^2,$$

wodurch die oben citirte Gleichung (I) in:

$$\int_0^{2\pi} \frac{Cos.mx - \sqrt{-1}\,Sin.mx}{1-\alpha Cos.x-\alpha\sqrt{-1}Sin.x}\,xdx =$$

$$= \left(\frac{1}{m} + \frac{\alpha}{m-1} + \frac{\alpha^2}{m-2} + \ldots + \frac{\alpha^{m-2}}{2} + \frac{\alpha^{m-1}}{1}\right) 2\pi\sqrt{-1}$$

$$+ 2\pi^2\alpha^m$$

$$- \left(\frac{\alpha^{m+1}}{1} + \frac{\alpha^{m+2}}{2} + \frac{\alpha^{m+3}}{3} + \frac{\alpha^{m+4}}{4} + \text{in inf.}\right) 2\pi\sqrt{-1}$$

übergeht; und wenn links und rechts vom Gleichheitszeichen die re-

ellen den reellen, und die imaginären den imaginären Theilen gleich gesetzt werden, ergeben sich, mit Beachtung der Gleichung:

$$-\log.(1-\alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^4}{4} + \text{in inf.} \quad (\text{für } \alpha^2 < 1)\ ,$$

folgende zwei Integralbestimmungen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx} - \alpha\text{Cos.}(m+1)x}{1 - 2\alpha\text{Cos.x} + \alpha^2}\, xdx = 2\pi^2\alpha^m\ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\text{Sin.mx} + \alpha\,\text{Sin.}(m+1)x}{1 - 2\alpha\,\text{Cos.x} + \alpha^2}\, xdx =$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{m} + \frac{\alpha}{m-1} + \frac{\alpha^2}{m-2} + \cdots + \frac{\alpha^{m-2}}{2} + \frac{\alpha^{m-1}}{1} + \alpha^m \log.(1-\alpha) \right\}\ .$$

Jede dieser Gleichungen bietet eine zweigliederige Recursionsgleichung dar, die, nach Nr. 93 aufgelöst, zur Bestimmung der Integralien:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-2\alpha\text{Cos.x}+\alpha^2}\, xdx\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.mx}}{1-2\alpha\text{Cos.x}+\alpha^2}\, xdx\ ,$$

oder auch der Integralien:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1 - a\,\text{Cos.x}}\, xdx\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.mx}}{1 - a\,\text{Cos.x}}\, xdx\ ,$$

in denen $a^2 < 1$ ist, führen; da jedoch das erste dieser bestimmten Integralien auch ohne Zuziehung einer Recursionsgleichung ermittelt werden kann, so wollen wir solches zuerst zeigen, worauf wir dann an die Auflösung der zweiten der oben aufgestellten Recursionsgleichungen übergehen werden.

Es ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-a\text{Cos.x}}\, xdx = \int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-a\text{Cos.x}}\, xdx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-a\text{Cos.x}}\, xdx\ ;$$

wird in dem von $x=\pi$ bis $x=2\pi$ zu nehmenden bestimmten Integrale x in $2\pi-x$ umgesetzt, so hat man, wenn beachtet wird, daß m eine ganze Zahl vorstellt,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-a\,\text{Cos.x}}\, xdx = \int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.mx}}{1-a\,\text{Cos.x}}\, (2\pi-x)\,dx\ ,$$

woraus dann:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,xdx = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,dx$$

gefunden wird, und wenn die Gleichung (84) der vorhergehenden Nr. zugezogen wird, hat man:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,xdx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m, \tag{85}$$

die für alle ganzen und positiven Werthe von m und für alle Werthe von a, welche numerisch kleiner als die Einheit sind, besteht.

Um nun das zweite der oben erwähnten bestimmten Integralien zu ermitteln, sei:

$$u_p = \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}(p+1)x}{1-2\alpha\,\text{Cos.}x+\alpha^2}\,xdx,$$

so bietet die zweite der obigen Recursionsgleichungen folgende Gleichung dar:

$$\alpha u_p - u_{p-1} = \varphi(p),$$

wo abkürzend

$$\varphi(p) = 2\pi \left\{\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{p-1} + \frac{\alpha^2}{p-2} + \ldots + \frac{\alpha^{p-2}}{2} + \frac{\alpha^{p-1}}{1} + \alpha^p \log.(1-\alpha)\right\}$$

gesetzt wurde; diese Recursionsgleichung mit der allgemeinen (A) Nr. 93 verglichen, bietet, vermöge der Gleichung (B) derselben Nr., folgende Auflösung dar:

$$u_p = \frac{u_0}{\alpha^p} + \frac{1}{\alpha}\varphi(p) + \frac{1}{\alpha^2}\varphi(p-1) + \frac{1}{\alpha^3}\varphi(p-2) + \ldots + \frac{1}{\alpha^{p-1}}\varphi(2) + \frac{1}{\alpha^p}\varphi(1),$$

und wenn die Bedeutung von u_0 und der Function φ beachtet wird, erhält man auch folgende Gleichung:

$$u_p = \frac{1}{\alpha^p} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}x}{1-2\alpha\,\text{Cos.}x+\alpha^2}\,xdx$$

$$+ 2\pi \left\{\frac{1}{p\alpha} + \frac{1}{p-1} + \frac{\alpha}{p-2} + \frac{\alpha^2}{p-3} + \ldots + \frac{\alpha^{p-2}}{1} + \alpha^{p-1} \log.(1-\alpha)\right\}$$

$$+ 2\pi \left\{\frac{1}{(p-1)\alpha^2} + \frac{1}{(p-2)\alpha} + \frac{1}{p-3} + \frac{\alpha}{p-4} + \ldots + \frac{\alpha^{p-4}}{1} + \alpha^{p-3} \log.(1-\alpha)\right\}$$

$+$

$$+ 2\pi \left\{ \frac{1}{(p-2)\alpha^3} + \frac{1}{(p-3)\alpha^2} + \frac{1}{(p-4)\alpha} + \frac{1}{p-5} + \frac{\alpha}{p-6} + .. \frac{\alpha^{p-6}}{1} + \alpha^{p-5} \log.(1-\alpha) \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2\pi \left\{ \frac{1}{2\alpha^{p-1}} + \frac{1}{1.\alpha^{p-2}} + \frac{1}{\alpha^{p-3}} \log.(1-\alpha) \right\}$$

$$+ 2\pi \left\{ \frac{1}{1.\alpha^{p}} + \frac{1}{\alpha^{p-1}} \log.(1-\alpha) \right\},$$

oder auch:

$$u_p = \frac{1}{\alpha^p} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.x}}{1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2} x dx + \frac{2\pi}{p\alpha} + \frac{2\pi}{p-1}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$+ \frac{2\pi\alpha}{p-2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right)$$

$$+ \frac{2\pi\alpha^2}{p-3} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^6}\right)$$

$$+ \frac{2\pi\alpha^3}{p-4} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^6} + \frac{1}{\alpha^8}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{2\pi\alpha^{p-2}}{1} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \ldots + \frac{1}{\alpha^{2p-2}}\right)$$

$$+ 2\pi\alpha^{p-1}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2p-2}}\right) \log.(1-\alpha).$$

Behandelt man das Integrale

$$\int \frac{\text{Sin.x}}{1 - \alpha\,\text{Cos.x} + \alpha^2} x dx$$

nach der Grundgleichung (4) Nr. 38, d. h. setzt man:

$$x = F(x) \text{ und } \frac{\text{Sin.x} dx}{1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2} = d.f(x),$$

so ist:

$$d.F(x) = dx \text{ und } f(x) = \frac{1}{2\alpha} \log.(1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2),$$

und man hat:

$$\int \frac{\text{Sin.x}}{1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2} x dx =$$

$$= \frac{x}{2\alpha} \log.(1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2) - \frac{1}{2\alpha} \int \log.(1-2\alpha\,\text{Cos.x}+\alpha^2)\, dx,$$

daher hat man auch, da $\alpha < 1$ ist, mit Zuziehung der Gleichung (64) Nr. 161,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}x}{1-2\alpha\,\text{Cos.}x+\alpha^2}\, x dx = \frac{2\pi}{\alpha} \log.(1-\alpha) ;$$

berücksichtiget man ferner die Gleichung:

$$1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2k-2}} = \frac{1}{\alpha^{2k-2}} \cdot \frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2},$$

so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$u_p = \frac{2\pi}{1-\alpha^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha^{-1}-\alpha^1}{p} + \dfrac{\alpha^{-2}-\alpha^2}{p-1} + \dfrac{\alpha^{-3}-\alpha^3}{p-2} + \dfrac{\alpha^{-4}-\alpha^4}{p-3} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{\alpha^{-p}-\alpha^p}{1} + (\alpha^{-(p+1)} - \alpha^{p+1}) \log.(1-\alpha), \end{array} \right\}$$

und man erhält endlich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx}{1-2\alpha\,\text{Cos.}x+\alpha^2}\, x dx =$$

$$= \frac{2\pi}{1-\alpha^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha^{-1}-\alpha^1}{m-1} + \dfrac{\alpha^{-2}-\alpha^2}{m-2} + \dfrac{\alpha^{-3}-\alpha^3}{m-3} + \dfrac{\alpha^{-4}-\alpha^4}{m-4} + \ldots \\ \ldots + \dfrac{\alpha^{-(m-1)} - \alpha^{(m-1)}}{1} + (\alpha^{-m} - \alpha^m) \log.(1-\alpha) . \end{array} \right\}$$

Wird hier, wie in der vorhergehenden Nr. geschah,

$$\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = a$$

gesetzt, wodurch, wegen $\alpha^2 < 1$,

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$$

angenommen werden muß, so hat man:

$$\alpha^n = \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^n, \qquad \alpha^{-n} = \left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^n,$$

$$\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha}{a-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}},$$

$$1-\alpha = \frac{2\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}},$$

und die vorige Gleichung geht in folgende über:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx}{1 - a\,\text{Cos.}x}\, x dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}}{m-1} \\ + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^2}{m-2} \\ + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^3}{m-3} \\ + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^4}{m-4} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{m-2} - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{m-2}}{2} \\ + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{m-1} - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{m-1}}{1} \\ + \left[\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m\right] \log.\dfrac{2\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}, \end{array} \right\} \quad (86)$$

die für dieselben Werthe von a und m, als die Gleichung (85) Bestand hat.

174. Multiplicirt man die Gleichung (84) Nr. 172 mit da, und integrirt in Bezug auf a, von $a = 0$ bis $a = b$, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x} \log.(1 - b\,\text{Cos.}x) dx = \pi \int_0^{b} \left(\frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m \frac{da}{\sqrt{1-a^2}},$$

wo b numerisch kleiner als die Einheit ist. Wird nun im Integralausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen a in $\text{Sin.}\alpha$ umgesetzt, so hat man, wenn abkürzend

$$\beta = \text{arc.Sin.}b$$

gesetzt wird,

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x} \log.(1-b\,\text{Cos.}x)dx = \pi \int_0^{\beta} \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^m d\alpha\ ,$$

wo also $\beta < \frac{\pi}{2}$ ist.

Setzt man in die zweite der Gleichungen (129) Nr. 77, $n = -m$, so hat man:

$$\int \left(\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\right)^m dx = \frac{1}{m-1}\left(\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\right)^{m-1} - \int \left(\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\right)^{m-2} dx\ ,$$

aus welcher

$$\int_0^{\beta} \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^m d\alpha = \frac{1}{m-1}\left(\text{Tang.}\frac{\beta}{2}\right)^{m-1} - \int_0^{\beta} \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^{m-2} d\alpha$$

gezogen wird. Man erhält daher, je nachdem m von der Form 2k oder von der Form 2k+1 ist, die eine oder die andere der zwei folgenden Gleichungen:

$$\int_0^{\beta} \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} d\alpha = (-1)^k \frac{\beta}{2} + (-1)^{k-1}\left(\frac{\beta'}{1} - \frac{\beta'^3}{3} + \frac{\beta'^5}{5} - \ldots \frac{(-1)^{k-1}\beta'^{2k-1}}{2k-1}\right),$$

$$\int_0^{\beta} \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1} d\alpha =$$

$$= (-1)^{k-1} \log.\text{Cos.}\frac{\beta}{2} + (-1)^{k-1}\left(\frac{\beta'^2}{2} - \frac{\beta'^4}{4} + \frac{\beta'^6}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}\beta'^{2k}}{2k}\right),$$

wo k ganz und positiv ist, und wo der Kürze wegen

$$\beta' = \text{Tang.}\frac{\beta}{2}$$

gesetzt wurde.

Sehen wir nun zu, was aus diesen Gleichungen wird, wenn man k in den Zustand des unendlichen Wachsens versetzt. — Bedenkt man die Gleichungen:

$$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{in inf.},$$

$$\log.(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{in inf.}\ ,$$

in denen die Reihen rechter Hand von den Gleichheitszeichen convergent sind, wenn man $x < 1$ voraussetzt, so erhält man durch Subtraction und Addition derselben:

$$\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{in inf.}\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}\log.(1-x^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} - \text{in inf.}$$

Wird in diesen Gleichungen $x=\beta'\sqrt{-1}$ angenommen, und bedenkt man den obigen Werth von β', so ergiebt sich, nach bekannten Formeln,

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\beta'}{1} - \frac{\beta'^3}{3} + \frac{\beta'^5}{5} - \frac{\beta'^7}{7} + \text{in inf.}\ ,$$

$$-\log.\text{Cos.}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\beta'^4}{4} + \frac{\beta'^6}{6} - \frac{\beta'^8}{8} + \text{in inf.}\ ;$$

daher erhält man, wenn m was immer für eine unendlich großwerdende, ganze und positive Zahl vorstellt,

$$\int_0^\beta \left(\text{Tang.}\frac{\alpha}{2}\right)^m d\alpha = 0\ ,$$

woraus dann:

$$\int_0^\pi \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x}\log.(1-b\,\text{Cos.}x)\,dx = 0$$

erhalten wird, wo $b<1$ und m eine unendlich großwerdende, ganze Zahl bedeutet.

Läßt man in dieser Gleichung x in $2\pi-x$ übergehen, und addirt die so erhaltene zur unveränderten Gleichung, so ergiebt sich auch:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x}\log.(1-b\,\text{Cos.}x)\,dx = 0\ ,$$

wird in derselben Gleichung x in $x-2\pi$ umgesetzt, und das Ergebniß zu der zuletzt aufgestellten Gleichung addirt, so hat man:

$$\int_0^{3\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x}\log.(1-b\,\text{Cos.}x)\,dx = 0\ ;$$

fährt man auf diese Weise fort, so erhält man auch für jede ganze Zahl k die Gleichung

$$\int_0^{k\pi} \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x}\log.(1-b\,\text{Cos.}x)\,dx = 0\ .$$

Ja es besteht sogar die Gleichung:

$$\int_0^b \frac{\text{Cos.}mx}{\text{Cos.}x} \log.(1-b\,\text{Cos.}x)\,dx = o\,,$$

für jeden Werth von b und für jeden reellen Werth von h, wenn nur m eine unendlich großwerdende ganze Zahl vorstellt, wie aus den viel allgemeineren Resultaten der folgenden Nrn. hervorgehen wird.

175. Wir legen uns nun folgende bestimmte Integralausdrücke:

$$\int_0^h \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx\,, \quad \int_0^{h'} \frac{\text{Sin.}kx}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx$$

zur Untersuchung und Bestimmung vor, in denen f(x) irgend eine, von $x=o$ bis $x=h$ oder $=h'$ continuirliche Function von x vorstellt, h und h' beliebige, endliche und reelle Größen sind, und k eine unendlich großwerdende, ganze Zahl bedeutet.

Wir werden jedoch, um mehr Klarheit im Vortrage und Sicherheit in den Ergebnissen zu erzielen, diese Größe k, vor der Hand, als endliche, übrigens beliebig große, ganze Zahl auftreten lassen, und erst am Schlusse unserer Untersuchungen, werden wir dieselbe in den Zustand des unendlichen und unbestimmten Wachsens versetzen.

Dieses vorausgesetzt, sei:

$$h = \frac{2n+1}{2}\pi + \alpha\,,$$

und

$$h' = m\pi + \alpha\,,$$

wo n und m ganze und positive Zahlenwerthe bedeuten, und $\alpha < \pi$ ist; so kann man die vorgelegten zwei bestimmten Integralien folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_0^h \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon} \frac{\text{Cos.}kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx$$

$$+$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{5\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx+\int_{\frac{5\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{5\pi}{2}+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\int_{\frac{2n-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2n+1}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx+\int_{\frac{2n+1}{2}\pi-\varepsilon}^{\frac{2n+1}{2}\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{2n+1}{2}\pi+\varepsilon}^{h}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx\,. \qquad (a)$$

$$\int_0^{h'}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx=\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx$$

$$+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx+\int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx$$

$$+\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx+\int_{2\pi+\varepsilon}^{3\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\int_{(m-1)\pi-\varepsilon}^{(m-1)\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx+\int_{(m-1)\pi+\varepsilon}^{m\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx$$

$$+\int_{m\pi-\varepsilon}^{m\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx+\int_{m\pi+\varepsilon}^{h'}\frac{\mathrm{Sin}.kx}{\mathrm{Sin}.x}f(x)\,dx\,, \qquad (b)$$

wo die Größe ε positiv, in der ersten Gleichung kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und in der zweiten kleiner als π vorausgesetzt ist.

Diese zwei Gleichungen kann man zunächst folgendermaßen stellen:

$$\int_0^{h}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx+\int_{\frac{2n+1}{2}\pi+\varepsilon}^{h}\frac{\mathrm{Cos}.kx}{\mathrm{Cos}.x}f(x)\,dx$$

$$+$$

$$+\sum_{r=1}^{r=n}\int_{\frac{2r-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}kx}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx+\sum_{r=0}^{r=n}\int_{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}kx}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx\,,$$

$$\int_0^{h'}\frac{\mathrm{Sin.}kx}{\mathrm{Sin.}x}f(x)\,dx=\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin.}kx}{\mathrm{Sin.}x}f(x)\,dx+\int_{m\pi+\varepsilon}^{h'}\frac{\mathrm{Sin.}kx}{\mathrm{Sin.}x}f(x)\,dx$$

$$+\sum_{r=1}^{r=m}\int_{(r-1)\pi+\varepsilon}^{r\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin.}kx}{\mathrm{Sin.}x}f(x)\,dx+\sum_{r=1}^{r=m}\int_{r\pi-\varepsilon}^{r\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin.}kx}{\mathrm{Sin.}x}f(x)\,dx\,;$$

und wenn man die zwei Fälle, k stellt eine gerade und k stellt eine ungerade Zahl vor, abgesondert behandelt, wodurch folgende Transformationen vorgenommen werden können:

$$\int_{\frac{2n+1}{2}\pi+\varepsilon}^{h}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k-n-1}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2n+1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{\frac{2n+1}{2}\pi+\varepsilon}^{h}\frac{\mathrm{Cos.}(2k+1)x}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\frac{\mathrm{Sin.}(2k+1)x}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2n+1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{\frac{2r-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k-r}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2r-1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{\frac{2r-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}(2k+1)x}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin.}(2k+1)x}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2r-1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k-r-1}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi+\varepsilon}\frac{\mathrm{Cos.}(2k+1)x}{\mathrm{Cos.}x}f(x)\,dx=(-1)^{k}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\mathrm{Sin.}(2k+1)x}{\mathrm{Sin.}x}\,f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right)dx\,,$$

$$\int_{m\pi+\varepsilon}^{h'} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = (-1)^m \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f(m\pi+x)\,dx\,,$$

$$\int_{m\pi+\varepsilon}^{h'} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f(m\pi+x)\,dx\,,$$

$$\int_{(r-1)\pi+\varepsilon}^{r\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = (-1)^{r-1} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f[(r-1)\pi+x]\,dx\,,$$

$$\int_{(r-1)\pi+\varepsilon}^{r\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f[(r-1)\pi+x]\,dx\,,$$

$$\int_{r\pi-\varepsilon}^{r\pi+\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = (-1)^r \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.2kx}{\mathrm{Sin}.x} f(r\pi+x)\,dx\,,$$

$$\int_{r\pi-\varepsilon}^{r\pi+\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin}.(2k+1)x}{\mathrm{Sin}.x} f(r\pi+x)\,dx\,,$$

so ergeben sich auch folgende, für alle ganzen Zahlenwerthe von k bestehenden vier Gleichungen:

$$\int_0^h \frac{\mathrm{Cos}.2kx}{\mathrm{Cos}.x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\mathrm{Cos}.2kx}{\mathrm{Cos}.x} f(x)\,dx + (-1)^{k-n-1} \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{\mathrm{Cos}.2kx}{\mathrm{Sin}.x}\, f\left(\frac{2n+1}{2}\pi+x\right) dx$$

$$+ (-1)^k \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^r \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{Cos}.2kx}{\mathrm{Sin}.x}\, f\left(\frac{2r-1}{2}\pi+x\right) dx$$

$$- (-1)^k \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\mathrm{Cos}.2kx}{\mathrm{Sin}.x}\, f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right) dx\,, \qquad (c)$$

$$\int_0^h \frac{\operatorname{Cos.}(2k+1)x}{\operatorname{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\operatorname{Cos.}(2k+1)x}{\operatorname{Cos.}x} f(x)\,dx + (-1)^k \int_\varepsilon^\alpha \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f\left(\frac{2n+1}{2}\pi+x\right) dx$$

$$+ (-1)^k \sum_{r=1}^{r=n} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f\left(\frac{2r-1}{2}\pi+x\right) dx$$

$$+ (-1)^k \sum_{r=0}^{r=n} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right) dx\,, \qquad \text{(d)}$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx + (-1)^m \int_\varepsilon^\alpha \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(m\pi+x)\,dx$$

$$- \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f[(r-1)\pi+x]\,dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(r\pi+x)\,dx\,, \qquad \text{(e)}$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx + \int_\varepsilon^{\alpha} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(m\pi+x)\,dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f[(r-1)\pi+x]\,dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(r\pi+x)\,dx\,, \qquad \text{(f)}$$

die wir in der nächstfolgenden Nr. unter der Annahme, k gehe in den Zustand des unendlichen Wachsens und ε in den des unendlichen Abnehmens über, einer sorgfältigen Untersuchung unterziehen werden.

176. Da es unserer Willkühr überlassen bleibt, über den Grad der Kleinheit von ε und den der Größe von k zu verfügen, so denken wir uns diese zwei Größen dergestalt, daß ihr Product unendlich groß-werdend ausfalle; welches offenbar erreicht wird, wenn wir den Grad des unendlichen Wachsens von k größer als den des unendlichen Abnehmens von ε feststellen.

Dieses vorausgesetzt, sind wir nach Nr. 151 zur Aufstellung folgender Grenzgleichungen berechtiget:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lim}: \text{Cos}.kx = o\ ,\\ \text{Lim}: \text{Sin}.kx = o\ ,\end{array}\right\}\ \text{von } x = \varepsilon \text{ bis } x = \infty\ ,$$

wo k als gerade oder ungerade Zahl auftritt, und wo die Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen von k Bezug haben; wird überdieß noch jedes der bestimmten Integralien rechter Hand der Gleichheitszeichen der Gleichungen (c), (d), (e) und (f) nach Gleichung (8) (Integralrechnung I. Nr. 36) behandelt, so gehen dieselben in folgende über:

$$\int_0^h \frac{\text{Cos}.2kx}{\text{Cos}.x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.2kx}{\text{Cos}.x} f(x)\,dx - (-1)^k \sum_{r=o}^{r=n} (-1)^r \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Cos}.2kx}{\text{Sin}.x}\, f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right)dx,$$

$$\int_0^h \frac{\text{Cos}.(2k+1)x}{\text{Cos}.x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.(2k+1)x}{\text{Cos}.x} f(x)dx + (-1)^k \sum_{r=o}^{r=n} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Sin}.(2k+1)x}{\text{Sin}.x}\, f\left(\frac{2r+1}{2}\pi+x\right)dx,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\text{Sin}.2kx}{\text{Sin}.x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{\text{Sin}.2kx}{\text{Sin}.x} f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Sin}.2kx}{\text{Sin}.x} f(r\pi+x)\,dx\ ,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{r=m} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(r\pi+x)\,dx\,.$$

Da wir die Function $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen 0 und h, 0 und h' continuirlich voraussetzten; und da ferner in den auszuführenden Integrationen, rechts von den Gleichheitszeichen der vier letzten Gleichungen, die Integrationsgrenzen um die unendlich klein werdende Größe ε oder 2ε abstehen, so gehen diese Gleichungen, mit Beachtung des Umstandes, daß die Ausdrücke:

$$\frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,, \qquad \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(x)$$

innerhalb der Integrationsgrenzen von $x = 0$ bis $x = \varepsilon$ ebenfalls continuirliche Function von x vorstellen, wodurch man:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx = \frac{\text{Cos.}2k\varepsilon}{\text{Cos.}\varepsilon} f(\varepsilon)\varepsilon = 0\,,$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx = \frac{\text{Cos.}(2k+1)\varepsilon}{\text{Cos.}\varepsilon} f(\varepsilon)\varepsilon = 0$$

hat, in folgende über:

$$\int_0^{h} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \left[\tfrac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi - \varepsilon\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi + \varepsilon\right)\right] \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x}\,dx\,,$$

$$\int_0^{h} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{k} \sum_{r=0}^{r=n} \left[\tfrac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi - \varepsilon\right) + \tfrac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi + \varepsilon\right)\right] \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x}\,dx\,,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx = [\tfrac{1}{2}f(o)+\tfrac{1}{2}f(\varepsilon)] \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x}dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^r [\tfrac{1}{2}f(r\pi-\varepsilon)+\tfrac{1}{2}f(r\pi+\varepsilon)] \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x}dx,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx = [\tfrac{1}{2}f(o)+\tfrac{1}{2}f(\varepsilon)] \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x}dx$$

$$+ \sum_{r=1}^{r=m} [\tfrac{1}{2}f(r\pi-\varepsilon)+\tfrac{1}{2}f(r\pi+\varepsilon)] \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x}dx.$$

Stellt man durch k' was immer für eine endliche oder unendlich großwerdende Zahl vor, so hat man:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Cos.}k'x}{\operatorname{Sin.}x}dx = o, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}k'x}{\operatorname{Sin.}x}dx = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}k'x}{\operatorname{Sin.}x}dx;$$

wenn daher die Continuität der Function f(x) (nach Einleitung Nr. 14) beachtet wird, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\int_0^{h} \frac{\operatorname{Cos.}2kx}{\operatorname{Cos.}x} f(x)\,dx = o,$$

$$\int_0^{h} \frac{\operatorname{Cos.}(2k+1)x}{\operatorname{Cos.}x} f(x)\,dx = 2(-1)^k \sum_{r=o}^{r=n} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi\right) \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x}dx,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx = \left\{f(o)+2\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^r f(r\pi)\right\} \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}2kx}{\operatorname{Sin.}x}dx,$$

$$\int_0^{h'} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x} f(x)\,dx = \left\{f(o)+2\sum_{r=1}^{r=m} f(r\pi)\right\} \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{Sin.}(2k+1)x}{\operatorname{Sin.}x}dx,$$

aus welchen zu ersehen ist, daß die bestimmten Integralausdrücke, links von den Gleichheitszeichen, sämmtlich noch von einem Integrale der Form:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin.}k'x}{\mathrm{Sin.}x} dx$$

abhängig sind, wo k′ unendlich großwerdend und ganz, ε unendlich kleinwerdend und gleichen Zeichens mit k′ und das Product $k'\varepsilon$ eine unendlich großwerdende, positive Zahl ist. Mit der Ausmittelung des Werthes dieses bestimmten Integrals werden wir uns in der folgenden Nr. beschäftigen.

177. Die unendlich kleinwerdende Zahl ε können wir uns noch immer in eine unendlich große Anzahl gleicher, unendlich kleinwerdender Theilchen getheilt denken; bezeichnet man durch ω eines dieser letzteren Theilchen, und durch μ deren Anzahl, so hat man die Gleichung:

$$\varepsilon = \mu\omega .$$

Wird zum Behufe der Ausmittelung des in Rede stehenden bestimmten Integrals die Gleichung (10) (Integralrechnung I. Nr. 36) zu Grunde gelegt, so hat man:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin.}k'x}{\mathrm{Sin.}x} dx = \omega \left\{ \frac{\mathrm{Sin.}k'\omega}{\mathrm{Sin.}\omega} + \frac{\mathrm{Sin}\,2k'\omega}{\mathrm{Sin.}2\omega} + \frac{\mathrm{Sin.}3k'\omega}{\mathrm{Sin}3\omega.} + \cdots + \frac{\mathrm{Sin.}\mu k'\omega}{\mathrm{Sin.}\mu\omega} \right\} ;$$

da die Größen ω, 2ω, 3ω, . . . $\mu\omega$ sämmtlich unendlich kleinwerdend sind, so kann man statt der letzten Gleichung auch folgende setzen:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{Sin.}k'x}{\mathrm{Sin.}x} dx = \frac{\mathrm{Sin.}k'\omega}{1} + \frac{\mathrm{Sin.}2k'\omega}{2} + \frac{\mathrm{Sin.}3k'\omega}{3} + \cdots + \frac{\mathrm{Sin.}\mu k'\omega}{\mu} , \quad (\alpha)$$

die also den Werth des fraglichen bestimmten Integrals durch eine unendliche Reihe ausgedrückt darstellt, zu deren Summation wir sofort übergehen.

Setzt man

$$u_{\mu} = \frac{\mathrm{Sin.}\lambda}{1} + \frac{\mathrm{Sin.}2\lambda}{2} + \frac{\mathrm{Sin.}3\lambda}{3} + \cdots + \frac{\mathrm{Sin.}\mu\lambda}{\mu} ,$$

$$v_{\mu} = \frac{\mathrm{Cos.}\lambda}{1.} + \frac{\mathrm{Cos.}2\lambda}{2} + \frac{\mathrm{Cos.}3\lambda}{3} + \cdots + \frac{\mathrm{Cos.}\mu\lambda}{\mu} ,$$

wo μ eine beliebige, positive, ganze Zahl bedeutet, so erhält man:

$$v_{\mu} + i u_{\mu} = \frac{e^{\lambda i}}{1} + \frac{e^{2\lambda i}}{2} + \frac{e^{3\lambda i}}{3} + \cdots + \frac{e^{\mu\lambda i}}{\mu} ,$$

in der e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und i die imaginäre Zahleneinheit $\sqrt{-1}$ vorstellt; versetzt man μ in den Zustand des unendlichen Wachsens, so geht diese Gleichung über in:

$$v_\mu + iu_\mu = -\log.(1-e^{\lambda i}),$$

oder in:

$$v_\mu + iu_\mu = \log.\tfrac{1}{2} + \log.[1+i\tang.(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\lambda}{2})];$$

wenn nun die erste der Gleichungen (α) Nr. 81 berücksichtiget wird, und dann die reellen von den imaginären Theilen gesondert werden, so erhält man, nach Restituirung der Werthe von u_μ und v_μ folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \log.\frac{1}{2\mathrm{Sin}.\frac{\lambda}{2}} &= \frac{\mathrm{Cos}.\lambda}{1} + \frac{\mathrm{Cos}.2\lambda}{2} + \frac{\mathrm{Cos}.3\lambda}{3} + \ldots + \frac{\mathrm{Cos}.\mu\lambda}{\mu}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} &= \frac{\mathrm{Sin}.\lambda}{1} + \frac{\mathrm{Sin}.2\lambda}{2} + \frac{\mathrm{Sin}.3\lambda}{3} + \ldots + \frac{\mathrm{Sin}.\mu\lambda}{\mu}, \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

die für alle Werthe von λ und für einen unendlich großwerdenden, ganzen und positiven Werth von μ bestehen.

Wird nun in die zweite dieser Gleichungen $\lambda = k'\omega$ angenommen, so geht die obige Gleichung (α) über in:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{Sin}.k'x}{\mathrm{Sin}.x}dx = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}k'\omega;$$

bedenkt man, daß die Gleichung (α), aus der die so eben aufgestellte Gleichung gefolgert wurde, um so richtiger ist, je kleiner die unendlich kleinwerdende Größe ω gedacht wird, so ist man das Product $k'\omega$ als unendlich kleinwerdend anzunehmen berechtiget, wodurch die zuletzt aufgestellte Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{Sin}.k'x}{\mathrm{Sin}.x}dx = \tfrac{\pi}{2}, \qquad (\gamma)$$

wo k' unendlich großwerdend, ε unendlich kleinwerdend, beide positiv und ihr Product unendlich großwerdend ist.

178. Es geben die vier letzten Gleichungen in Nr. 176, wenn die Gleichung (γ) der vorangehenden Nr. zugezogen, die Werthe von h und h' aus Nr. 175 wiederum hergestellt und die Summenzeichen durch die entsprechenden Summanden ersetzt werden, in folgende über:

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Cos.}x} f(x)\,dx = 0 \;, \tag{87}$$

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Cos.}(2k+1)x}{\mathrm{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \pi(-1)^k \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \right\} , \tag{88}$$

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Sin.}2kx}{\mathrm{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} f(0) - f(\pi) + f(2\pi) - f(3\pi) + \ldots + (-1)^m f(m\pi) \right\} , \tag{89}$$

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Sin.}(2k+1)x}{\mathrm{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots + f(m\pi) \right\} , \tag{90}$$

die für alle positiven, ganzen Werthe von m und n, Null mitbegriffen, und für $0 < \alpha < \pi$ bestehen.

Um den Fall, wenn man $\alpha = 0$ hat, zu erörtern, müssen wir uns noch einmal den Gleichungen (a) und (b) Nr. 175 zuwenden.

Bei einem aufmerksamen Betrachten dieser Gleichungen, namentlich der Endglieder derselben, ersieht man alsbald die nöthigen Abänderungen, die dieselben, bei der Annahme $\alpha=0$, erleiden müssen. Verfährt man mit den so umgeformten Gleichungen, wie mit den primitiven nach den vorhergehenden Nrn., so gelangt man sehr bald auf folgende Gleichungen:

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\mathrm{Cos.}2kx}{\mathrm{Cos.}x} f(x)\,dx = 0 \;, \tag{91}$$

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\mathrm{Cos.}(2k+1)x}{\mathrm{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \pi(-1)^k \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + \tfrac{1}{2} f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \right\} , \tag{92}$$

$$\int_0^{m\pi} \frac{\text{Sin}.2kx}{\text{Sin}.x} f(x)\, dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} f(o) - f(\pi) + f(2\pi) - .. + (-1)^{m-1} f[(m-1)\pi] + \tfrac{1}{2}(-1)^m f(m\pi) \right\}, \quad (93)$$

$$\int_0^{m\pi} \frac{\text{Sin}.(2k+1)x}{\text{Sin}.x} f(x)\, dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} f(o) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f[(m-1)\pi] + \tfrac{1}{2} f(m\pi) \right\}, \quad (94)$$

die also auch noch den Fall umfassen, wenn man in den Gleichungen (87) — (90) $\alpha = \pi$ voraussetzt. Die letzten acht Gleichungen enthalten somit die Auflösung der anfangs Nr. 175 vorgelegten zwei bestimmten Integralien für alle Werthe von h und h'.

Nunmehr sind wir in der Lage die am Schlusse Nr. 174 gemachte Behauptung zu rechtfertigen.

Setzt man nämlich in den Gleichungen (87), (88), (91) und (92) die Function f(x) von der Form:

$$\log.(1-b\,\text{Cos}.x)$$

voraus, so erhält man, wegen

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) \ldots = f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \log.1 = o\,,$$

die am angeführten Orte aufgestellte Gleichung in der dort ausgesprochenen Allgemeinheit.

179. Aus den Gleichungen (87) — (94) vorhergehender Nr., deren zwei, (90) und (94), Dirichlet zuerst mittheilte, wollen wir noch einige, den in diesen Gleichungen enthaltenen analoge bestimmte Integralien ableiten.

Für jeden ganzen, übrigens noch so großen und endlichen Werth von k bestehen folgende Gleichungen:

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos}.2kx}{\text{Cos}.x} f(x)\, dx = (-1)^{k-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Cos}.2kx}{\text{Sin}.x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\, dx\,,$$

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos}.(2k+1)x}{\text{Cos}.x} f(x)\, dx = (-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Sin}.(2k+1)x}{\text{Sin}.x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\, dx\,,$$

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx = (-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx\,,$$

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx = (-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2m-1}{2}\pi} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx\,,$$

wo die Ausdrücke rechts aus den Ausdrücken links der Gleichheitszeichen entspringen, wenn in letzteren x in $\frac{\pi}{2}+x$ umgesetzt wird.

Aus diesen Gleichungen entspringen ferner die folgenden:

$$(-1)^{k-1} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx\,,$$

$$(-1)^k \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx\,,$$

$$(-1)^k \int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx\,,$$

$$(-1)^k \int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx\,;$$

versetzen wir nun k in den Zustand des unendlichen Wachsens, und legen die Gleichungen (87) — (90) zu Grunde, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx\,,$$

$$\int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx$$

$$+\pi\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right\},$$

$$\int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx$$

$$+(-1)^k\pi\left\{\tfrac{1}{2}f(o)-f(\pi)+f(2\pi)-f(3\pi)+\ldots+(-1)^m f(m\pi)\right\},$$

$$\int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}+x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx$$

$$+(-1)^k\pi\left\{\tfrac{1}{2}f(o)+f(\pi)+f(2\pi)+f(3\pi)+\ldots+f(m\pi)\right\};$$

verfährt man hier, wie in Nr. 476, so ist man zur Aufstellung folgender Gleichungen berechtiget:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx = f(\tfrac{\pi}{2}) \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x}\,dx\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(\tfrac{\pi}{2}-x)\,dx = f(\tfrac{\pi}{2}) \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x}\,dx\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2} - x)\, dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2} - x)\, dx = (-1)^{k-1} f(o) \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Sin.}x}\, dx\,,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2} - x)\, dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(\tfrac{\pi}{2} - x)\, dx = (-1)^{k} f(o) \int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x}\, dx\,.$$

Berücksichtiget man die Gleichung (γ) Nr. 177, so erscheinen die Ausdrücke rechts der Gleichheitszeichen der drei letzten Gleichungen völlig bestimmt; was die erste dieser vier Gleichungen betrifft, bedenke man Folgendes:

Es ist, wenn Alles in derselben Bedeutung, wie in Nr. 177 auftritt,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}k'x}{\text{Sin.}x}\, dx = \omega \left\{ \frac{\text{Cos.}k'\omega}{\text{Sin.}\omega} + \frac{\text{Cos.}2k'\omega}{\text{Sin.}2\omega} + \frac{\text{Cos.}3k'\omega}{\text{Sin.}3\omega} + \ldots + \frac{\text{Cos.}\mu k'\omega}{\text{Sin.}\mu\omega} \right\},$$

oder auch:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}k'x}{\text{Sin.}x}\, dx = \frac{\text{Cos.}k'\omega}{1} + \frac{\text{Cos.}2k'\omega}{2} + \frac{\text{Cos.}3k'\omega}{3} + \ldots + \frac{\text{Cos.}\mu k'\omega}{\mu}\,;$$

setzt man daher in die erste der Gleichungen (β) derselben citirten Nr.:

$$\lambda = k'\omega\,,$$

so erhält man:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}k'x}{\text{Sin.}x}\, dx = \log.\frac{1}{2\,\text{Sin.}\frac{k'}{2}\omega}\,; \qquad (\delta)$$

und da das erhaltene Resultat um so genauer ausfällt, je kleiner ω angenommen wird, so ergiebt sich ein unendlich großwerdender Werth für das fragliche bestimmte Integrale links vom Gleichheitszeichen. Wir werden jedoch, da es Fälle geben kann, in denen das Product:

$$f(\tfrac{\pi}{2})\,.\,\log.\frac{1}{2\,\text{Sin.}\frac{k'}{2}\omega}$$

auch bei der Annahme, $\frac{k'}{2}\omega$ sei unendlich kleinwerdend, dennoch einen nicht unendlich großwerdenden Werth darbietet, einfach das Ergebniß der Gleichung (δ) in die obige Gleichung substituiren; wodurch folgende Resultate erhalten werden:

$$\int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(x+\tfrac{\pi}{2})\,dx = f(\tfrac{\pi}{2}) \log.\frac{1}{2\,\text{Sin.}k\omega},$$

$$\int_0^{n\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} f(x+\tfrac{\pi}{2})\,dx =$$

$$= \pi\left\{\tfrac{1}{2}f(\tfrac{\pi}{2}) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right\},$$

$$\int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x+\tfrac{\pi}{2})\,dx =$$

$$= (-1)^{k-1}\pi\,\{f(\pi) - f(2\pi) + f(3\pi) - \ldots + (-1)^{m-1} f(m\pi)\},$$

$$\int_0^{\frac{2m-1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} f(x+\tfrac{\pi}{2})\,dx =$$

$$= (-1)^k\pi\,\{f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots + f(m\pi)\},$$

woraus auch, wenn $f(x)$ statt $f(x+\frac{\pi}{2})$, m statt n und n+1 statt m gesetzt wird, die Identität der zweiten dieser Gleichungen mit Gleichung (90), der vierten mit der Gleichung (88) der vorhergehenden Nr. ersichtlich wird; die erste und dritte dieser Gleichungen aber bieten neue Resultate dar, die man auch, wie folgt, stellen kann:

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}2kx}{\text{Sin.}x} f(x)\,dx = f(o) \log.\frac{1}{2\,\text{Sin.}k\omega}, \qquad (95)$$

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{k-1}\pi\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) \ldots + (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right\}, \qquad (96)$$

wo $k\omega$ eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt, und $\alpha > o$ und $< \pi$ ist. Für $\alpha = o$ bleibt die Gleichung (95) unverändert, die Gleichung (96) hingegen geht in folgende über:

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{\text{Sin.}2kx}{\text{Cos.}x} f(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{k-1}\pi \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \ldots (-1)^{n-1} f\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) + \frac{(-1)^n}{2} f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \right\}. \quad (97)$$

Setzt man in die Gleichungen (89) und (96)

$2k+1-1$ statt $2k$,

so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} [f(x)\,\text{Cos.}x]\,dx - \int_0^{m\pi+\alpha} \text{Cos.}(2k+1)x\,f(x)\,dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} f(o) - f(\pi) + f(2\pi) - f(3\pi) + \ldots + (-1)^m f(m\pi) \right\} ,$$

$$\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \text{Sin.}(2k+1)x\,f(x)\,dx - \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} [f(x)\,\text{Sin.}x]\,dx =$$

$$= (-1)^{k-1}\pi \left\{ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \ldots + (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \right\} ,$$

aus welchen, mit Beachtung der Gleichungen (90) und (88) der vorangehenden Nr., die folgenden gezogen werden:

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^{m\pi+\alpha} \text{Cos.}(2k+1)x\,f(x)\,dx = o \,, \\ &\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha} \text{Sin.}(2k+1)x\,f(x)\,dx = o \,, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

die für alle ganzen Werthe von m und n, und nicht nur für $\alpha > o$ und $\alpha < \pi$, sondern auch noch für $\alpha = o$ bestehen, wenn nur die Function f(x) im Bereiche der Integrationsgrenzen continuirlich bleibt, und k eine unendlich großwerdende, ganze Zahl vorstellt.

Eben so führt die Gleichung (88) der vorangehenden Nr., wenn die Gleichung (87) derselben Nr. zugezogen wird, auf die Gleichung:

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \text{Cos.}2kx\, f(x)\, dx = o \;, \tag{99}$$

und wenn man in Gleichung (89) die Function f(x) in f(x)Sin.x übergehen läßt, erhält man auch:

$$\int_0^{m\pi+\alpha} \text{Sin.}2kx\, f(x)\, dx = o \;, \tag{100}$$

welche zwei Gleichungen unter den gleichen Beschränkungen, als die Gleichungen (98) bestehen.

180. Von den in den vorhergehenden Nrn. aufgestellten Gleichungen kann bisweilen bei der Summation ohne Ende fortlaufender Reihen Vortheil gezogen werden, wie aus dem Folgenden erhellen wird.

Setzt man in die erste der Gleichungen (53) Nr. 159 statt b nach und nach die ganzen Zahlenwerthe:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots k\ ,$$

so erhält man, wegen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Cos.}x+\text{Cos.}2x+\text{Cos.}3x+\ldots+\text{Cos.}kx = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{x}{2}}{\text{Sin.}\frac{x}{2}}\,, \\ &\text{Cos.}x-\text{Cos.}2x+\text{Cos.}3x-\ldots(-1)^{k-1}\text{Cos.}kx = \tfrac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{\text{Cos.}(2k+1)\frac{x}{2}}{\text{Cos.}\frac{x}{2}}\,, \end{aligned}\right\}(\alpha)$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\left\{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{x}{2}}{\text{Sin.}\frac{x}{2}}\right\}dx =$$

$$= a\left\{\frac{1}{a^2+1^2}+\frac{1}{a^2+2^2}+\frac{1}{a^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{a^2+k^2}\right\}\,,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\left\{-\tfrac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{\text{Cos.}(2k+1)\frac{x}{2}}{\text{Cos.}\frac{x}{2}}\right\}dx =$$

$$= a\left\{\frac{1}{a^2+1^2}-\frac{1}{a^2+2^2}+\frac{1}{a^2+3^2}-\ldots+(-1)^{k-1}.\frac{1}{a^2+k^2}\right\}\;;$$

läßt man zur Linken der Gleichheitszeichen x in 2x übergehen, so

bleiben die Integrationsgrenzen unverändert; und wenn überdieß noch zu beiden Seiten der Gleichheitszeichen p in $\frac{1}{2}a$ umgetauscht wird, so erhält man, mit Beachtung der Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1}{a^2+(2n)^2}, \tag{101}$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} e^{-ax} dx = \frac{(-1)^k}{a} + 2a(-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{a^2+(2n)^2}, \tag{102}$$

in welchen a eine beliebig positive und k irgend eine ganze, positive Zahl vorstellt.

Versetzt man nun in diesen Gleichungen k in den Zustand des immerwährenden Zunehmens, so gehen die Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen in ohne Ende fortlaufende convergente Reihen über; und da die Ausdrücke zur Linken mit Zuziehung der Gleichungen (90) und (88) Nr. 178 bestimmt werden können, so erhält man dadurch die Summen dieser ohne Ende fortlaufenden Reihen.

Nach den eben citirten Gleichungen hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} e^{-ax} dx =$$

$$= \pi \left\{ \tfrac{1}{2} + e^{-a\pi} + e^{-2a\pi} + e^{-3a\pi} + e^{-4a\pi} + \text{in inf.} \right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} e^{-ax} dx =$$

$$= (-1)^k \pi \left\{ e^{-\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{7\pi}{2}} + \text{in inf.} \right\},$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x} e^{-ax} dx = \pi \left\{ \tfrac{1}{2} + \frac{e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} \right\} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} \right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}(2k+1)x}{\text{Cos.}x} e^{-ax} dx = (-1)^k \pi \cdot \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}},$$

die nur für unendlich großwerdende Werthe der ganzen und positiven Zahl k bestehen, daher hat man auch:

$$\pi \cdot \frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{1}{a} + 2a\left\{\frac{1}{a^2+2^2} + \frac{1}{a^2+4^2} + \frac{1}{a^2+6^2} + \text{ in inf.}\right\},$$

$$\pi \cdot \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{1}{a} - 2a\left\{\frac{1}{a^2+2^2} - \frac{1}{a^2+4^2} + \frac{1}{a^2+6^2} - \text{ in inf.}\right\},$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2+2^2} + \frac{1}{a^2+4^2} + \frac{1}{a^2+6^2} + \frac{1}{a^2+8^2} + \text{ in inf.} = \\
&\qquad = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}}, \\
&\frac{1}{a^2+2^2} - \frac{1}{a^2+4^2} + \frac{1}{a^2+6^2} - \frac{1}{a^2+8^2} + \text{ in inf.} = \\
&\qquad = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}},
\end{aligned}\right\} \quad (J)$$

welche Gleichungen zwei der angekündigten Summationen darstellen.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Summen noch einiger, in der Analysis häufig vorkommenden Reihen ableiten, die wir auch noch mittheilen wollen.

Es ist

$$\frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{e^{\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{a\pi}{2}}}{e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}},$$

und

$$\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{1}{e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}};$$

daher findet man:

$$\frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{2}{a\pi} \cdot \frac{1 + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots}{1 + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots},$$

$$\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{1}{a\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots},$$

oder man hat auch, wenn die Ausdrücke zur Rechten der Gleichheitszeichen, nach Ausscheidung der Factoren $\frac{2}{a\pi}$ und $\frac{1}{a\pi}$, in Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{a\pi}{2}$ fortgehen, aufgelöst werden, folgende Gleichungen:

$$\frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{2}{a\pi}\left\{1 + U_2\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2 + U_4\left(\frac{a\pi}{2}\right)^4 + U_6\left(\frac{a\pi}{2}\right)^6 + \ldots\right\},$$

$$\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{1}{a\pi}\left\{1 + V_2\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2 + V_4\left(\frac{a\pi}{2}\right)^4 + V_6\left(\frac{a\pi}{2}\right)^6 + \ldots\right\},$$

wo die Coefficienten U_2, U_4, U_6, ... V_2, V_4, V_6, ... folgende Relationen eingehen:

$$\left.\begin{aligned}
&U_2 + \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2}, \\
&U_4 + \frac{U_2}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4}, \\
&U_6 + \frac{U_4}{1.2.3} + \frac{U_2}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}, \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&V_2 + \frac{1}{1.2.3} = 0, \\
&V_4 + \frac{V_2}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0, \\
&V_6 + \frac{V_4}{1.2.3} + \frac{V_2}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0, \\
&\quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

Entwickelt man ebenfalls die Ausdrücke zur Linken der Gleichheitszeichen der Gleichungen (β) nach aufsteigenden Potenzen von a, so wird man auf folgende zwei Gleichungen geführt:

$$\tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2k} U_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \frac{1}{8^{2k}} + \text{in inf.},$$

$$\tfrac{1}{2}(-1)^k\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2k} V_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} - \frac{1}{8^{2k}} + \text{in inf.}\ ,$$

und wenn endlich diese zwei Gleichungen mit 2^{2k} multiplicirt werden, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(-1)^{k-1}\pi^{2k} U_{2k} &= 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \text{in inf.}\ , \\ \tfrac{1}{2}(-1)^{k}\pi^{2k} V_{2k} &= 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \text{in inf.}\ , \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

welche Gleichungen für alle ganzen und positiven Werthe von k bestehen. Die obigen Gleichungen (γ) mit diesen letzteren vereint, stellen die Summen der ohne Ende fortlaufenden Reihen rechts der Gleichheitszeichen in (δ) durch sehr bequeme Recursionen dar.

181. Wie aus den in §. I des vorliegenden Kapitels aufgestellten Sätzen hervorgeht, können Schwierigkeiten, bei der Entscheidung der Frage über Convergenz und Divergenz eines bestimmten Integrals, nur dann noch eintreten: wenn erstens eine der Integrationsgrenzen unendlich großwerdend ist; zweitens, wie aus der Schlußbemerkung zu Nr. 113 hervorgeht, wenn in der zu integrirenden Differenzialformel $\varphi(x)dx$ die Function $\varphi(x)$, beim Uebergange der allgemeinen Größe x von dem untern Grenzwerthe des bestimmten Integrals, den wir endlich oder unendlich kleinwerdend voraussetzen wollen, bis zum obern, unendlich großwerdenden Werthe desselben eine unbestimmte, ohne Ende wachsende Anzahl von Zeichenabwechselungen eingeht. Einen Fall, von ziemlicher Allgemeinheit dieser Art stellt das bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin.}a_1 x, \text{Sin.}a_2 x, \ldots \text{Cos.}b_1 x, \text{Cos.}b_2 x, \ldots)\,dx$$

dar, wo φ irgend ein Functionzeichen (Einleitung Nr. 1) und a_1, a_2, ... b_1, b_2, ... beliebige, reelle, ganze oder gebrochene und von x unabhängige Zahlenwerthe vorstellen; und da dieses bestimmte Integrale, falls dasselbe zu den convergenten gehört, in ein anderes, mit demselben untern und mit einem endlichen obern Grenzwerthe versehenes umgesetzt werden kann, so lassen wir uns noch, zum Beschlusse dieses Kapitels, in eine etwas ausführliche Erörterung über dieses bestimmte Integrale ein, von dem bereits mehrere besondere Fälle in den Nrn. 149, 150 und 152 mitgetheilt und bestimmt worden sind.

Wir leiten diese Untersuchungen ein, indem wir Einiges über die Summation der ohne Ende fortlaufenden, convergenten und periodischen Reihen voranschicken.

182. Eine nach aufsteigenden Potenzen einer allgemeinen Größe x geordnete, ohne Ende fortlaufende Reihe werden wir eine periodische nennen, wenn die von x unabhängigen Coefficienten der einzelnen Glieder derselben eine Periode bilden.

Setzt man also

$$\begin{aligned} y = & a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_p x^{p-1} \\ & + a_1x^p + a_2x^{p+1} + a_3x^{p+2} + \ldots + a_p x^{2p-1} \\ & + a_1x^{2p} + a_2x^{2p+1} + a_3x^{2p+2} + \ldots + a_p x^{3p-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned} \tag{I}$$

wo die Reihe rechter Hand vom Gleichheitszeichen ins Unendliche fortläuft, so bildet dieselbe, wenn die Coefficienten:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_p$$

unabhängig von x sind, eine periodische Reihe, mit deren Summation wir uns zunächst befassen werden.

Wird zu diesem Zwecke

$$P = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_p x^{p-1} \tag{α}$$

gesetzt, so geht die vorgelegte Gleichung (I) in folgende über:

$$y = P(1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + x^{4p} + \ldots) ;$$

nun hat man für alle Werthe von $x = o$ bis $x = 1$ die Gleichung:

$$\frac{1}{1-x^p} = 1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + x^{4p} + \ldots ,$$

daher hat man auch, für dieselben Werthe von x, die Gleichung:

$$y = \frac{P}{1-x^p} , \tag{β}$$

welche die Summe der vorgelegten, ohne Ende fortlaufenden Reihe in Gleichung (I) darstellt.

Aus dieser Summe nimmt man zunächst ab, daß die fragliche Reihe für alle positiven Werthe von x, die kleiner als die Einheit sind, convergirend sei, wenn nur die Coefficienten a_1, a_2, a_3, ... a_p zwar beliebige, jedoch keine unendlich großwerdende Werthe vorstellen; dagegen nähert sich diese Reihe einem unendlich großwerdenden Werthe, oder dieselbe wird divergirend, wenn, bei derselben Beschaffenheit

der Coefficienten, die allgemeine Größe x der positiven Einheit unendlich nahe kömmt.

Da für unsern Zweck der Fall, einer oder mehrere der Coefficienten a_1, a_2, a_3 . . . a_p seien unendlich großwerdend, als beachtungslos sich herausstellen wird, so sehen wir von diesem, immer möglichen Falle im Vorliegenden ab, und erklären diese Coefficienten als endliche oder unendlich kleinwerdende Größen.

Unter dieser Voraussetzung ist es möglich über diese Coefficienten dergestalt zu verfügen, daß die vorgelegte Reihe in (I) auch noch für $x = 1$ convergirend verbleibe.

In der That, wie aus den oben aufgestellten Gleichungen erhellet, rührt dieses unendlich Großwerden von y, oder die Divergenz der Reihe (I) für $x = 1$, lediglich von dem in $1-x^p$ enthaltenen Factor $1-x$ her; wählt man daher die Coefficienten a_1, a_2, a_3, . . . a_p dergestalt, daß die Größe P der Gleichung (α) auch noch diesen Factor $1-x$ enthalte, so stellt sich der Werth von y, wenn dieser gemeinschaftliche Factor $1-x$ aus Zähler und Nenner des Bruches, rechts vom Gleichheitszeichen der Gleichung (β), durch Division weggeschafft wird, auch noch für $x = 1$ nicht mehr als unendlich großwerdende Größe dar, woraus dann die Convergenz der Reihe in (I) für den gleichen Werth von x, nämlich für $x=1$, als möglich sich herausstellt.

Dieses wird erreicht, wenn man, wie aus der Lehre der Gleichungen bekannt ist, folgenden Zusammenhang unter den Coefficienten feststellt:

$$o = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p \; ; \qquad \text{(II)}$$

d. h. beim Statthaben dieser Gleichung, stellt sich der Werth von y der Gleichung (β), und mithin auch der der vorgelegten Reihe in (I), sogar dann noch von dem Zustande des unendlichen Großwerdens verschieden dar, wenn auch $x = 1$ angenommen wird.

Da es gerade dieser Fall ist, von dem wir, bei den Erörterungen über das in der vorhergehenden Nr. besprochene bestimmte Integrale, ausgehen werden, so wollen wir die Summe der Reihe in (I), für $x = 1$, unter der Annahme des Bestandhabens der Gleichung (II) hier noch folgen lassen.

Wird beim Statthaben der Gleichung (II) in die Gleichung (β) $x = 1$ gesetzt, und wird der diesem Werthe von x entsprechende Werth von y durch y_1 vorgestellt, so ergiebt sich:

$$y_1 = \frac{0}{0};$$

allein behandelt man diese Gleichung (β) nach dem in der Differenzialrechnung Nr. 29 mitgetheilten Verfahren, so ergiebt sich, falls x ohne Ende der positiven Einheit nahe kömmt, folgender Grenzwerth für y, den wir ebenfalls durch y_1 darstellen wollen,

$$y_1 = -\frac{1}{p}\left(\frac{dP}{dx}\right)_1,$$

wo $\left(\frac{dP}{dx}\right)_1$ den Differenzialquotienten der Größe P nach x vorstellt, wenn man nach vollzogener Differenziation $x = 1$ setzt. Nun bietet der oben aufgestellte Werth von P, aus Gleichung (α), die Gleichung:

$$\frac{dP}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 + \ldots + (p-1)a_px^{p-2}$$

dar, woraus

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_1 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (p-1)a_p$$

gezogen wird, daher hat man:

$$y_1 = -\frac{1}{p}[a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (p-1)a_p],$$

oder auch, mit Zuziehung der Gleichung (II),

$$y_1 = -\frac{1}{p}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + pa_p). \qquad \text{(III)}$$

Diese Gleichung, deren Bestehen vom Statthaben der Bedingungsgleichung (II) abhängt, und die den Grenzwerth der Reihe in (I) angiebt, falls x der positiven Einheit unendlich nahe rückt, werden wir in den folgenden Nrn. bei der Reduction des in der vorangehenden Nr. aufgeführten bestimmten Integrals zu Grunde legen. Findet aber die Bedingungsgleichung (II) nicht Statt, so gehört die Reihe in (I), wenn x der positiven Einheit unendlich nahe gebracht wird, zu den Divergenten, oder dieselbe bietet alsdann einen unendlich großwerdenden Werth dar.

Von diesem letzteren Falle werden wir bei der Beurtheilung der Divergenz desselben bestimmten Integrals Gebrauch machen.

Wir schließen diese Nr. mit folgender Bemerkung. Wenn in der Reihe (I) die allgemeine Größe x nicht unendlich nahe der positiven Einheit, sondern absolut der positiven Einheit gleich gesetzt wird, so gehört dieselbe beim Statthaben der Bedingungsgleichung (II) zu

den sogenannten schwankenden, d. h. der Werth dieser Reihe schwankt zwischen mehreren, gleich möglichen Größen oder Zahlen, je nachdem man bei irgend einem Gliede derselben die Summation, von der Linken zur Rechten, abbricht. Diese Werthe sind, wie man sich ohne große Mühe überzeugen kann, folgende:

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3+a_4,\ \ldots .$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{p-1} \text{ und } o\ ,$$

deren Anzahl gleich p ist; nimmt man nun die Summe dieser gleich möglichen p Werthe, und bezeichnet dieselbe durch S, so hat man:

$$S=(p-1)a_1+(p-2)a_2+(p-3)a_3+\ldots+2a_{p-2}+1.a_{p-1}\ ;$$

da wir von der Voraussetzung des Statthabens der Gleichung (II) ausgehen, so besteht auch folgende Gleichung:

$$o=pa_1+pa_2+pa_3+\ldots+pa_{p-2}+pa_{p-1}+pa_p\ ;$$

wird diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, so hat man:

$$S=-\left\{a_1+2a_2+3a_3+\ldots(p-1)a_{p-1}+pa_p\right\}\ ,$$

und wenn diese Gleichung mit der Gleichung (III) verglichen wird, erhält man endlich:

$$y_1=\frac{S}{p}\ .$$

Man nennt arithmetisches Mittel mehrerer Zahlen, die Summe derselben dividirt durch ihre Anzahl: somit zeigt uns die letzte Gleichung, daß das arithmetische Mittel aller Werthe, deren die Reihe (I) fähig ist, wenn $x=1$ angenommen wird, dem Grenzwerthe dieser Reihe gleich kömmt, falls x ohne Ende der positiven Einheit sich nähert. Jedoch kann von einem arithmetischen Mittel sowohl, als von einem Grenzwerthe nur beim Statthaben der Bedingungsgleichung (II) die Rede sein.

183. Wir wenden uns nunmehr unserem Hauptgegenstande zu, und legen folgende (Integralrechnung I, Gleichung (10), Nr. 36) Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\omega\left\{\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\varphi(a+3\omega)+\ldots+\varphi(b-\omega)+\varphi(b)\right\} \quad \text{(IV)}$$

bei allen unseren folgenden Untersuchungen zu Grunde, in der b größer als a, ω eine unendlich kleinwerdende Größe und

$$b-a=n\omega,\ \text{oder}\ b=a+n\omega \ \text{ist}\ ,$$

also n als unendlich großwerdende, ganze und positive Zahl auftritt.

Bevor wir zur Lösung des allgemeinen Falles schreiten, schicken wir, das hierbei anzuwendende Verfahren leichter übersehen zu können, einige besondere Fälle voraus.

Die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$\begin{aligned}&\omega\,\mathrm{Sin.}\omega + x\omega\,\mathrm{Sin.}2\omega + x^2\omega\,\mathrm{Sin.}3\omega + \ldots + x^{p-1}\omega\,\mathrm{Sin.}p\omega\\ &+ x^p\omega\,\mathrm{Sin.}\omega + x^{p+1}\omega\,\mathrm{Sin.}2\omega + x^{p+2}\omega\,\mathrm{Sin.}3\omega + \ldots + x^{2p-1}\omega\mathrm{Sin.}p\omega\\ &+ x^{2p}\omega\,\mathrm{Sin.}\omega + x^{2p+1}\omega\,\mathrm{Sin.}2\omega + x^{2p+2}\omega\,\mathrm{Sin.}3\omega + \ldots + x^{3p-1}\omega\mathrm{Sin.}p\omega\\ &+ x^{3p}\omega\,\mathrm{Sin.}\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned}$$

deren ins Unendliche fortzusetzende Summe, nach der vorhergehenden Nr., gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt, wenn $x < 1$ ist, nähert sich auch, nach der obigen Gleichung (IV), dem Werthe des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty \mathrm{Sin.}x dx ,$$

wenn in dieser Reihe, erstens x ohne Ende der positiven Einheit nahe kömmt, zweitens, wenn ω eine unendlich klein- und p eine unendlich großwerdende Größe vorstellt, und wenn drittens

$$p\omega = 2\pi$$

ist, so daß man

$$\mathrm{Sin.}m\omega = \mathrm{Sin.}(kp\omega + m\omega) = \mathrm{Sin.}(2k\pi + m\omega)$$

hat, falls unter k irgend eine ganze und positive Zahl gedacht wird.

Vergleicht man aber dieselbe Reihe mit der allgemeinen (I) vorhergehender Nr., so hat man:

$a_1 = \omega\,\mathrm{Sin.}\omega$, $a_2 = \omega\,\mathrm{Sin.}2\omega$, $a_3 = \omega\,\mathrm{Sin.}3\omega$, . . $a_p = \omega\,\mathrm{Sin.}p\omega$,

und bei der Annahme, es stehe der Werth von x dieser Reihe um ein unendlich Kleines von der positiven Einheit ab, hat man nach Gleichung (III), beim Statthaben der Gleichung (II) derselben Nr., die gegenwärtig in folgende übergeht:

$$o = \omega\,\mathrm{Sin.}\omega + \omega\,\mathrm{Sin.}2\omega + \omega\,\mathrm{Sin.}3\omega + \ldots + \omega\,\mathrm{Sin.}p\omega ,$$

folgenden Grenzwerth für dieselbe unendliche Reihe,

$$-\frac{1}{p}\left\{\omega\,\mathrm{Sin.}\omega + 2\omega\,\mathrm{Sin.}2\omega + 3\omega\,\mathrm{Sin.}3\omega + \ldots + p\omega\,\mathrm{Sin.}p\omega\right\} .$$

Berücksichtiget man daher die oben für ω und p festgestellten Bedeutungen, wie auch die Gleichung (IV), so hat man, beim Statthaben der Bedingungsgleichung:

$$o = \int_0^{2\pi} \text{Sin.}x dx ,$$

folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \text{Sin}x\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, \text{Sin.}x\, dx ; \qquad (\alpha)$$

nun hat man

$$\int \text{Sin.}x\, dx = -\text{Cos.}x + \text{Const.}$$

woraus

$$\int_0^{2\pi} \text{Sin.}x\, dx = -1 + 1 = o ,$$

gefolgert wird, also findet die obige Bedingungsgleichung Statt, daher auch die Gleichung (α), welche die einfachste der Reductionsgleichungen ist, deren in Nr. 181 Erwähnung geschah.

Auf ganz analoge Weise gelangt man zum Ergebnisse, daß beim Statthaben der Bedingungsgleichung:

$$o = \int_0^{2\pi} \text{Cos.}x\, dx ,$$

folgende Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty \text{Cos.}x\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, \text{Cos.}x\, dx \qquad (\beta)$$

gleichfalls Bestand hat. Diese Bedingungsgleichung findet aber in der That Statt, somit stellt die Gleichung (β) ebenfalls eine der vorhin erwähnten Reductionsgleichungen dar.

Läßt man überdieß noch, in den Ausdrücken zur Linken der Gleichheitszeichen der Gleichungen (α) und (β), x in ax übergehen, so gehen dieselben über in:

$$\int_0^\infty \text{Sin.}ax\, dx = -\frac{1}{2a\pi}\int_0^{2\pi} x\, \text{Sin.}x\, dx ,$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}ax\, dx = -\frac{1}{2a\pi}\int_0^{2\pi} x\, \text{Cos.}x\, dx ;$$

und wenn jedes der bestimmten Integralien zur Rechten der Gleichheitszeichen in eine Summe zweier Integralien, das eine von o bis π und das andere von π bis 2π aufgelöst wird, und wenn ferner in den von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$ zu vollziehenden Integrationen x in $\pi + x$ umgesetzt wird, so hat man statt der letzten zwei Gleichungen folgende:

$$\int_0^\infty \text{Sin.}ax\, dx = \frac{1}{2a}\int_0^{\pi} \text{Sin.}x\, dx ,$$

$$\int_0^\infty \text{Cos.}ax\,dx = \frac{1}{2a}\int_0^\pi \text{Cos.}x\,dx\ ,$$

und wenn a verschieden von Null gedacht wird, erhält man endlich:

$$\int_0^\infty \text{Sin.}ax\,dx = \frac{1}{a}\ , \qquad \int_0^\infty \text{Cos.}ax\,dx = 0\ ,$$

welche zwei Gleichungen in völliger Uebereinstimmung mit den Gleichungen (47) Nr. 156 sind.

184. Um einen allgemeineren Fall vorzuführen, stellen a und b beliebige, ganze oder gebrochene, reelle Zahlen vor; ω und p bleiben in derselben Bedeutung, in der sie in der vorhergehenden Nr. auftraten, d. h. ω sei unendlich klein=, p unendlich großwerdend und ganz, ohne jedoch an die Gleichung

$$p\omega = 2\pi$$

nothwendig gebunden zu sein; und wenn φ was immer für ein Functionzeichen vorstellt, so convergirt die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$\omega\varphi(\text{Sin.}a\omega,\ \text{Cos.}b\omega) + x\omega\varphi(\text{Sin.}2a\omega,\ \text{Cos.}2b\omega) + \ .\ .\ + x^{p-1}\omega\varphi(\text{Sin.}pa\omega,\ \text{Cos.}pb\omega)$$
$$+\ x^p\omega\varphi(\text{Sin.}a\omega,\ \text{Cs.}b\omega) + x^{p+1}\omega\varphi(\text{Sin.}2a\omega,\ \text{Cs.}2b\omega) + \ldots + x^{2p-1}\omega\varphi(\text{Sin.}pa\omega,\ \text{Cs.}pb\omega)$$
$$+\ x^{2p}\omega\varphi(\text{Sin.}a\omega,\ \text{Cos.}b\omega) + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

gegen einen endlichen Grenzwerth, wenn x was immer für einen echtgebrochenen Zahlenwerth vorstellt.

Setzt man nun

$$pa\omega = ka.2\pi\ , \qquad pb\omega = kb.2\pi\ ,$$

wo k völlig willkührlich und an die einzige Bedingung gebunden ist, die Producte ka und kb in ganze Zahlen umzusetzen, so stellt die obige Reihe, wenn in derselben x ohne Ende der positiven Einheit nahe gebracht wird, und wenn das Product:

$$\omega.\varphi(\text{Sin.}ma\omega,\ \text{Cos.}mb\omega)$$

für jeden, beliebig ganzen Werth von m unendlich kleinwerdend ausfällt (Integralrechnung III Nr. 105 und 106), den Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}\ ax,\ \text{Cos.}bx)\,dx$$

dar. Allein bei derselben Annahme, den Werth von x obiger Reihe betreffend, nimmt diese Reihe, nach Gleichung (III) Nr. 182, entweder folgenden Werth an:

$$- \frac{1}{p} \left\{ \omega\varphi(\text{Sin.}a\omega, \text{Cos.}b\omega) + 2\omega\varphi(\text{Sin.}2a\omega, \text{Cos.}2b\omega) + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + p\omega\varphi(\text{Sin.}pa\omega, \text{Cos.}pb\omega) \right\}$$

oder dieselbe nähert sich dem unendlich großwerdenden Zustande, je nachdem die dort aufgeführte Bedingungsgleichung (II), die nunmehr in:

$$o = \omega \left\{ \varphi(\text{Sin.}a\omega, \text{Cos.}b\omega) + \varphi(\text{Sin.}2a\omega, \text{Cos.}2b\omega) + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \varphi(\text{Sin.}pa\omega, \text{Cos.}pb\omega) \right\}$$

übergeht, Bestand hat oder nicht.

Man hat also, mit Beachtung der Gleichung (IV) vorhergehender Nr., je nachdem die folgende Gleichung:

$$\int_0^{r\omega} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,dx = o$$

angenommen werden kann oder nicht, mit Beachtung derselben Gleichung (IV) und der Gleichung:

$$\frac{1}{p} = \frac{\omega}{2k\pi}, \tag{α}$$

entweder:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)dx = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^{r\omega} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,x\,dx,$$

oder:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,dx = \infty;$$

oder man hat auch, wenn in den bestimmten Integralien, die von $x=0$ bis $x=p\omega$ sich erstrecken, x in kx umgesetzt wird, mit Berücksichtigung der vorigen Gleichung (α), je nachdem die Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\text{Sin.}akx, \text{Cos.}bkx)\,dx = o,$$

Statt findet oder nicht, im ersten Falle:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,dx = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\text{Sin.}akx, \text{Cos.}bkx)\,x\,dx, \tag{β}$$

und im zweiten:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,dx = \infty, \tag{γ}$$

wo ak und bk beliebige, ganze Zahlenwerthe vorstellen.

Im ersten Falle ist das Integrale:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}ax, \text{Cos.}bx)\,dx,$$

nach dem in Nr. 107 begründeten Satze, wenn man nämlich die Gleichung (β) mit berücksichtiget, ein convergentes, und im zweiten Falle ein divergentes.

Was die unbestimmte Zahl k betrifft, ist Folgendes zu bemerken. Sind a und b ganze Zahlen, so kann man für k jede ganze Zahl, folglich auch 1 wählen; sind aber a und b gebrochene Zahlen, so kann für k jedes Vielfache der Nenner dieser gebrochenen Zahlen, also auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Nenner gewählt werden.

185. Was nun den in Nr. 181 besprochenen, allgemeinsten Fall betrifft, so gelangt man durch ähnliche Betrachtungen, wie in der vorhergehender Nr. angestellt worden, auf folgendes allgemeine Theorem:

Wenn

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots;\quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots.$$

beliebige reelle, ganze oder gebrochene Zahlenwerthe vorstellen; und wenn das Product der unendlich kleinwerdenden Größe ω mit der Function:

$$\varphi(\mathrm{Sin}.a_1m\omega,\ \mathrm{Sin}.a_2m\omega,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.b_1m\omega,\ \mathrm{Cos}.b_2m\omega,\ \ldots)$$

für jeden ganzen, übrigens noch so großen Werth von m beständig unendlich kleinwerdend ausfällt, so hat man beim Statthaben der Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\mathrm{Sin}.a_1kx,\ \mathrm{Sin}.a_2kx,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.b_1kx,\ \mathrm{Cos}.b_2kx,\ \ldots)\,dx = o\ , \qquad (A)$$

auch folgende Reductionsgleichung:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\mathrm{Sin}.a_1x,\ \mathrm{Sin}.a_2x,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.b_1x,\ \mathrm{Cos}.b_2x,\ \ldots)\,dx =$$

$$= -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{Sin}.a_1kx,\ \mathrm{Sin}.a_2kx,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.b_1kx,\ \mathrm{Cos}.b_2kx,\ \ldots)\,x\,dx\ ; \qquad (B)$$

und beim Nichtstatthaben dieser Bedingungsgleichung (A) hat man:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\mathrm{Sin}.a_1x,\ \mathrm{Sin}.a_2x,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.b_1x,\ \mathrm{Cos}.b_2x,\ \ldots)\,dx = \infty\ , \qquad (C)$$

oder, das bestimmte Integrale, Nr. 181, ist beim Eintreffen der Bedingungsgleichung (A) convergirend, und in jedem andern Falle divergirend.

Die neu eingeführte Größe k ist, wenn a_1, a_2, .. b_1, b_2, ... ganze Zahlenwerthe haben, ebenfalls eine ganze Zahl, und kann in

diesem Falle durch die positive Einheit ersetzt werden; sind aber diese Größen gebrochene Zahlen, so ist für k jedes ganze Vielfache oder auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner dieser gebrochenen Zahlen zu nehmen, oder, die unbestimmte Zahl k ist jedesmal dergestalt zu wählen, daß die Producte:

$$ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \ldots;\ kb_1,\ kb_2,\ kb_3,\ \ldots$$

ganze Zahlenwerthe vorstellen.

186. In dem, in der vorangehenden Nr. aufgestellten Satze setzten wir die Größen $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ als ganze oder gebrochene, also durch eine endliche Einheit immer ausdrückbare oder meßbare Zahlen voraus; sind aber diese Zahlen durch keine endliche Einheit meßbar, so kann man von den in diesem Satze aufgestellten Gleichungen keinen weiteren Gebrauch machen, als höchstens um angenäherte Bestimmungen zu erhalten, indem man nämlich diese mit der endlichen Einheit incommensurablen Zahlen angenähert durch Bruchtheile der Einheit ausdrückt. Der einzige Fall jedoch, wenn diese Zahlen an und für sich zwar mit der endlichen Einheit unmeßbar, die gegenseitigen Verhältnißzahlen derselben aber sämmtlich durch eine gemeinschaftliche, endliche Einheit ausdrückbar sind, kann, wie aus dem Folgenden erhellen wird, in vollster Strenge, nach den Gleichungen der vorangehenden Nr. behandelt werden.

Wenn in dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \varphi(\mathrm{Sin}.\alpha_1 x,\ \mathrm{Sin}.\alpha_2 x,\ \ldots\ \mathrm{Cos}.\beta_1 x,\ \mathrm{Cos}.\beta_2 x,\ \ldots)\,dx$$

die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$ incommensurable Zahlenwerthe vorstellen, die jedoch sämmtlich, gegenseitig, commensurable Verhältnisse eingehen, so werden folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\alpha_1 = \lambda a_1,\quad \alpha_2 = \lambda a_2,\ \ldots$$
$$\beta_1 = \lambda b_1,\quad \beta_2 = \lambda b_2,\ \ldots$$

in denen λ incommensurabel, die Buchstaben $a_1, a_2, . b_1, b_2, ..$ aber commensurable Größen vorstellen werden.

Läßt man nun in dem vorliegenden bestimmten Integrale x in $\frac{x}{\lambda}$ übergehen, so erhält man, mit Beachtung der so eben festgestellten Gleichungen:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.\alpha_1 x, \text{Sin}.\alpha_2 x, \ldots \text{Cos}.\beta_1 x, \text{Cos}.\beta_2 x, \ldots)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1 x, \text{Sin}.a_2 x, \ldots \text{Cos}.b_1 x, \text{Cos}.b_2 x, \ldots)\,dx,$$

und da die Zahlengrößen $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$ durch eine endliche, ganze oder gebrochene Einheit ausdrückbar sind, so kann das bestimmte Integrale rechts vom Gleichheitszeichen den in der vorangehenden Nr. aufgestellten Gleichungen unterzogen werden, daher auch über die Convergenz oder Divergenz des in Rede stehenden bestimmten Integrals mit aller Strenge entschieden werden kann.

187. Kehren wir nun zu den in Nr. 185 aufgestellten Gleichungen zurück, und untersuchen die zwei bestimmten Integralien:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Cos}.b_1 x, \text{Cos}.b_2 x, \text{Cos}.b_3 x, \ldots)\,dx,$$

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1 x, \text{Sin}.a_2 x, \text{Sin}.a_3 x, \ldots)\,dx,$$

jedes einzelne für sich.

I. Vermöge der Gleichungen (A) und (B) hat man:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Cos}.b_1 x, \text{Cos}.b_2 x, \text{Cos}.b_3 x, \ldots)\,dx =$$

$$= -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\text{Cos}.b_1 kx, \text{Cos}.b_2 kx, \text{Cos}.b_3 kx, \ldots)\,x\,dx,$$

wenn folgende Bedingungsgleichung

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\text{Cos}.b_1 kx, \text{Cos}.b_2 kx, \text{Cos}.b_3 kx, \ldots)\,dx = 0$$

Statt findet. Zerlegen wir nun jede der von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ zu vollziehenden Integrationen in eine Summe zweier, die eine von $x=0$ bis $x = \pi$ und die andere von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$, setzen dann in den letzteren x in $2\pi - x$ um, so ergiebt sich, aus dem Grunde daß $b_1 k, b_2 k, b_3 k, \ldots$ ganze Zahlenwerthe haben, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Cos}.b_1 x, \text{Cos}.b_2 x, \ldots)\,dx = -\frac{k}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(\text{Cos}.b_1 kx, \text{Cos}.b_2 kx, \ldots)\,x\,dx$$

$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(\text{Cos}.b_1 kx, \text{Cos}.b_2 kx, \ldots)(2\pi - x)\,dx,$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Cos}.b_1 x, \text{Cos}.b_2 x, \ldots)\,dx = -k\int_0^\pi \varphi(\text{Cos}.b_1 kx, \text{Cos}.b_2 kx, \ldots)\,dx,$$

wenn folgende Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\pi} \varphi(\text{Cos.}b_1kx,\ \text{Cos.}b_2kx,\ \ldots)\,dx = o$$

Statt findet; da nun beim Statthaben dieser Bedingungsgleichung das Integrale links vom Gleichheitszeichen der vorangehenden Gleichung in Null und beim Nichtstatthaben in Unendlich übergeht, so gelangen wir auf folgenden merkwürdigen Satz:

Wenn b_1, b_2, b_3, ... beliebige, mit einer endlichen Einheit meßbare Zahlenwerthe vorstellen, so ist das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Cos.}b_1x,\ \text{Cos.}b_2x,\ \text{Cos.}b_3x,\ \ldots)\,dx$$

entweder gleich Null oder gleich Unendlich, je nachdem das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\pi} \varphi(\text{Cos.}b_1kx,\ \text{Cos.}b_2kx,\ \text{Cos.}b_3kx,\ \ldots)\,dx$$

gleich oder verschieden von Null ist, wo k völlig willkührlich und an die einzige Bedingung, die Producte:

$$b_1k,\quad b_2k,\quad b_3k,\ \ldots$$

in ganze Zahlen umzusetzen, gebunden ist.

II. Das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}a_1x,\ \text{Sin.}a_2x,\ \text{Sin.}a_3x,\ \ldots)\,dx\ ,$$

in dem a_1, a_2, a_3, .. gleichfalls, mit einer endlichen Einheit meßbare Zahlenwerthe bedeuten, stellt sich, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, minder einfach dar.

Man hat, vermöge der Gleichungen (A) und (B),

$$\int_0^{\infty} \varphi(\text{Sin.}a_1x,\ \text{Sin.}a_2x,\ \ldots)\,dx = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\text{Sin.}a_1kx,\ \text{Sin.}a_2kx,\ldots)\,x\,dx\,,$$

wenn die Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\pi^2} \varphi(\text{Sin.}a_1kx,\ \text{Sin.}a_2kx,\ \ldots)\,dx = o$$

Bestand hat. Verfährt man mit den zwischen 0 und 2π zu nehmenden bestimmten Integralien wie oben in I, so erhält man:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1x, \text{Sin}.a_2x, \ldots) dx =$$

$$= k\int_0^\pi \varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) dx$$

$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^\pi \{\varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) - \varphi(-\text{Sin}.a_1kx, -\text{Sin}.a_2kx, \ldots)\} x dx, (\alpha)$$

wenn man die Bedingungsgleichung:

$$\int_0^\pi \{\varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) + \varphi(-\text{Sin}.a_1kx, -\text{Sin}.a_2kx, \ldots)\} dx = o \quad (\beta)$$

hat, und beim Nichtstatthaben dieser Gleichung erhält man:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1x, \text{Sin}.a_2x, \ldots) dx = \infty .$$

Gehen wir nun von der Annahme des Statthabens dieser Bedingungsgleichung (β) aus, und zerlegen die von $x = o$ bis $x = \pi$ sich erstreckenden Integrationen in solche, die von $x = o$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ und von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \pi$ fortgehen, setzen dann in die letzteren $\pi - x$ statt x, so entsteht, mit Beachtung des Umstandes daß die ganzen Zahlen:

$$a_1k, \; a_2k, \; a_3k, \; a_4k, \ldots$$

entweder sämmtlich ungerade Zahlenwerthe haben können, oder, im entgegengesetzten Falle (wenn nämlich einige derselben ungerade und die übrigen gerade Zahlenwerthe vorstellen), durch Umsetzung von k in 2k sämmtlich in gerade Zahlen sich umformen lassen, die Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}a_2kx, \ldots) + \varphi(-\text{Sin}.a_1kx, -\text{Sin}.a_2kx, \ldots)\} dx = o,$$

und beim Statthaben derselben hat man, wenn die Producte:

$$a_1k, \; a_2k, \; a_3k, \; a_4k, \ldots$$

sämmtlich ungerade Zahlenwerthe haben, die Reductionsgleichung:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1x, \text{Sin}.a_2x, \ldots) dx = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) dx, \quad (a)$$

und wenn nur einige dieser Producte ungerade Zahlen sind, so kann man durchs Umsetzen von k in 2k sämmtliche Producte in gerade Zahlen verwandeln, wodurch, beim Statthaben derselben Bedingungsgleichung, folgende Reductionsgleichung erhalten wird:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin}.a_1x, \text{Sin}.a_2x, \ldots) dx = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) dx$$

$$-\frac{k}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varphi(\text{Sin}.a_1kx, \text{Sin}.a_2kx, \ldots) x dx. \quad (b)$$

Anmerkung. Eine flüchtige Betrachtung dieser Ergebnisse läßt noch einigen Zweifel gegen die Richtigkeit derselben zurück. In I fanden wir nämlich, daß das bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Cos.}b_1x,\ \text{Cos.}b_2x,\ \ldots)dx\ ,$$

in dem b_1, b_2, b_3, . . beliebige, jedoch rationale Zahlenwerthe bedeuten, nur zweier Werthe:

$$o \text{ und } \infty$$

fähig sei, während wir zugleich in II fanden, daß das bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \varphi(\text{Sin.}a_1x,\ \text{Sin.}a_2x,\ \ldots)\,dx \qquad (A)$$

außer den so eben erwähnten zwei Werthen, auch noch, wie aus der Gleichung (b) zum Deutlichsten entnommen werden kann, jeden anderen Werth vorstellen kann; da man aber statt des zuletzt aufgestellten bestimmten Integrals auch folgendes

$$\int_0^\infty \varphi[\sqrt{1-(\text{Cos.}a_1x)^2}\ ,\ \sqrt{1-(\text{Cos.}a_2x)^2}\ ,\ \ldots]\,dx \qquad (B)$$

setzen darf, und dieses letztere, nach I, nur unendlich klein- oder auch noch unendlich großwerdend sein kann, so stehen diese zwei Ergebnisse in offenbarem Widerspruche zu einander. — Dieser Widerspruch ist aber nur scheinbar, und kann, wie folgt, gehoben werden.

Die allgemeine Gleichung:

$$\text{Sin.}z = \sqrt{1-\text{Cos.}z^2}\ ,$$

hat nur insofern Bestand, als man das Wurzelzeichen, rechts vom Gleichheitszeichen, im positiven Sinne von $z = o$ bis $z = \pi$, im negativen von $z = \pi$ bis $z = 2\pi$, wiederum im positiven Sinne von $z = 2\pi$ bis $z = 3\pi$ und im negativen von $z = 3\pi$ bis $z = 4\pi$ u. s. w., auftreten läßt; ganz die gleiche Bewandtniß muß es mit den Wurzelgrößen im bestimmten Integrale (B) haben, falls solches aus (A) entstanden, und demselben gleichbedeutend soll angesehen werden dürfen. Dieses zugegeben, kann das bestimmte Integrale in (B) nicht mehr nach dem in I Mitgetheilten behandelt werden; denn in I setzten wir die Beschaffenheit der Function φ, im ganzen Bereiche der Integrationsgrenzen oder vom Null- bis zum unendlich großwerdenden Werthe der allgemeinen Größe, als eindeutig voraus, und da dieses bei der Gleichung (B), wie aus dem Vorangeschickten hervorgeht, nicht mehr der Fall ist, so verliert der obige Widerspruch alle seine Haltbarkeit.

188. Um auch einige Anwendungen auf besondere Fälle der bis jetzt aufgestellten allgemeinen Gleichungen zu geben, legen wir uns zunächst folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx$$

zur Ausmittelung vor.

Da man nach den Gleichungen (64) und (65) Nr. 161, wenn $a \leqq 1$ ist, die Gleichung:

$$\int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = o$$

und bei der Annahme $a > 1$, nach Gleichung (65) derselben Nr., folgende Gleichung:

$$\int_0^\pi \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = \pi \log.a^2$$

hat, so hat man auch, nach der vorhergehenden Nr. I, entweder:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = o\,, \tag{103}$$

oder:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Cos}.x)\,dx = \infty\,; \tag{104}$$

die erste dieser zwei Gleichungen findet für alle reellen Werthe von a, die gleich oder kleiner als Eins sind, und die zweite für die, die Einheit übertreffenden, reellen Werthe von a Statt.

Beachtet man ferner die Gleichungen (66) und (67) derselben citirten Nr., so bietet der in der vorangehenden Nr. betrachtete Fall I auch folgende Gleichungen dar:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \log.(1+\mathrm{Cos}.x)\,dx = \infty\,, \\ &\int_0^\infty \log.(1-\mathrm{Cos}.x)\,dx = \infty\,; \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

geht hier x in 2x über, so erhält man auch:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \log.\mathrm{Cos}.x^2\,dx = \infty\,, \\ &\int_0^\infty \log.\mathrm{Sin}.x^2\,dx = \infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

189. Wir fanden Nr. 172 Gleichung (83), wenn m einen ganzen und positiven Werth vorstellt, und wenn $a^2 < 1$ ist, daß das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Cos}.mx\,dx}{1-a\,\mathrm{Cos}.x}$$

einen von Null verschiedenen Werth darbietet, daher hat man auch bei derselben Annahme der Werthe von m und a, nach Nr. 187 I, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{1-a\,\text{Cos.}x} = \infty. \qquad (107)$$

Anders ist das Ergebniß, welches folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1-a\text{Cos.}x}$$

darbietet, wo m sowohl als a in der obigen Bedeutung auftreten.

Man hat nämlich, nach Nr. 185, beim Statthaben der Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,dx = 0,$$

auch folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{1-a\,\text{Cos.}x} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,x\,dx\,;$$

nun findet diese Bedingungsgleichung, nach Gleichung (82) Nr. 172, Statt, mithin auch die zuletzt aufgestellte Gleichung, welche, mit Zuziehung der Gleichung (86) Nr. 173, auf folgendes Resultat führt:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}mx}{1-a\,\text{Cos.}x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m\right\}\log.\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{2\sqrt{1-a}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\sum_{p=1}^{p=m-1}\frac{1}{m-p}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^p\right\}, \qquad (108)$$

wo das Summenzeichen auf alle ganzen und positiven Werthe von $p=1$ bis $p=m-1$ sich erstreckt; in dem einzigen Falle, wenn man $m = 1$ hat, wo also der obere Werth von $p=0$, also <1 ist, reducirt sich, wie aus der citirten Gleichung (86) erhellet, der Werth dieses Summenausdruckes auf Null.

Viertes Kapitel.

Näherungsweise Bestimmung der Integralausdrücke.

Einleitung.

190. Wenn der Werth eines unbestimmten oder bestimmten Integralausdruckes nach keiner der bis jetzt mitgetheilten Integrationsmethoden auf algebraische oder exponentielle Functionen gebracht werden kann, so wird man die Integralfunction, so lange wenigstens dieser Zustand fortdauert, als eine von den so eben angeführten Functionen verschiedene, und mithin zu einer anderen und höheren Art von Functionen gehörende erklären dürfen, und daher auch auf die Angabe von Annäherungsmethoden zur Bestimmung derselben sich angewiesen sehen.

Streng genommen giebt es nur eine geringe Anzahl von Functionen, die algebraisch rationalen nämlich, die, was die numerische Bestimmung derselben betrifft, keiner Annäherungsmethoden bedürfen. Wir führen zur Unterstützung dieser Behauptung die folgenden, höchst einfachen Functionen:

$$\sqrt{x},\ \sqrt[3]{1-x^2},\ \text{Sin.}x,\ \log.x \ \text{ u. d. m.},$$

an, welche sämmtlich nur für eine geringe Anzahl von Werthen der allgemeinen Größe x Werthe annehmen, die zu den Werthen dieser allgemeinen Größe in genau angebbaren Verhältnissen stehen; in bei weitem größerer Anzahl sind jene Zahlenwerthe von x, die zu den entsprechenden Werthen dieser Functionen in incommensurabeln Verhältnissen stehen, und die daher nur annäherungsweise mit diesen verglichen werden oder als Maße derselben auftreten können.

Diesem zufolge stellen die bei weitem größere Mehrzahl der in den zwei vorangehenden Kapiteln gewonnenen Integralbestimmungen ebenfalls nur angenäherte Resultate dar; es kommt denselben lediglich der Umstand zu Statten, daß bereits Methoden bekannt sind, dieselben

annähernd zu bestimmen, und daß sogar einige Functionen dieser Resultate, was die numerischen Werthe derselben betrifft, in Tabellen gut geordnet zusammengestellt sich vorfinden, so daß man entweder die bekannten Methoden anzuwenden oder die numerischen Werthe dieser Functionen aus den Tabellen einfach abzulesen braucht.

Anders verhält es sich aber, wenn die Integralfunction, wie oben erwähnt wurde, weder auf algebraische noch auf exponentielle Functionen zurückgebracht werden kann, wo man sonach mit den bekannten Hülfsmitteln nicht mehr auslangt. Diese Integralien und die Methoden, die zu deren näherungsweisen Lösung führen, werden den Innhalt des vorliegenden und letzten Kapitels dieses Bandes ausmachen.

---

§. I.

Integration durch ohne Ende fortlaufende Reihen.

191. Im vorangehenden Kapitel §. I haben wir bereits mehrere Sätze über Convergenz und Divergenz ohne Ende fortlaufender Reihen mitgetheilt, deren Glieder, von irgend einem angefangen, beständig dasselbe Zeichen tragen; da man jedoch auch bisweilen auf Reihen geführt wird, bei denen die Glieder nach einem bestimmten Gesetze Abwechselungen der Zeichen eingehen, so wollen wir, bevor wir zum eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels übergehen, den folgenden, die Convergenz der Reihen letzterer Art betreffenden Lehrsatz aufnehmen.

Wenn in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe, wie die folgende:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots, \qquad (a)$$

die Glieder, von irgend einem endlichen, übrigens noch so großen Stellenzeiger k angefangen, und bis ins Unendliche fortgesetzt, beständig und ohne Ende abnehmen, und Abwechselungen in den Zeichen eingehen; so zwar: daß die Summe der auf u_k folgenden und mit einerlei Zeichen begabten Glieder, deren letztes u_{k_1} sein mag, durch U_{k_1}, die Summe der auf u_{k_1} folgenden, mit den entgegengesetzten Zeichen von u_{k_1} begabten Glieder, deren letztes durch u_{k_2} vorgestellt sein mag, durch U_{k_2}, die Summe

der auf u_{k_2} folgenden und mit dem entgegengesetzten Zeichen von u_{k_2} begabten Glieder, wo das letzte u_{k_3} ist, durch U_{k_3} u. s. w. dargestellt wird, so gehört die vorgelegte Reihe, wenn

$$k,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_p,\ k_{p+1},\ \ldots$$

ganze, positive und ins Unendliche wachsende Zahlen vorstellen, zu den convergenten, wenn die Glieder der ebenfalls ohne Ende fortlaufenden Reihe:

$$U_{k_1},\ U_{k_2},\ U_{k_3},\ \ldots\ U_{k_p},\ U_{k_{p+1}},\ \ldots \qquad \text{(A)}$$

unter denen zwei unmittelbar auf einander folgende entgegengesetzte Zeichen haben, von irgend einem endlichen Stellenzeiger angefangen und ins Unendliche fortgesetzt, beständig und ohne Ende abnehmen.

Stellt man, um den Beweis dieses Satzes zu führen, die Summe der vorgelegten Reihe (a) durch y und die der Reihe (A) durch Y vor, so hat man:

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + Y,$$

und da, nach der Voraussetzung, k einen endlichen Werth hat, so haben wir nur darzuthun, daß Y einen endlichen Werth habe, um auch alsdann ein Gleiches von y aussprechen zu können.

Stellt nun k_h jenen Stellenzeiger in der Reihe (A) vor, von dem angefangen, die folgenden und größeren Zeigern entsprechenden Glieder immerfort abnehmen, so kann man den Werth von Y auch folgendermaßen stellen:

$$Y = \pm \{U_{k_1} - U_{k_2} + U_{k_3} - U_{k_4} \ldots \pm U_{k_h}\} + R_h$$

wo man

$$R_h = \pm \{U_{k_{h+1}} - U_{k_{h+2}} + U_{k_{h+3}} - U_{k_{h+4}} + \text{in inf.}\}$$

hat: und wir haben nur noch darzuthun, daß der Werth von R_h beim Zunehmen von h immer kleiner und kleiner ausfällt, und zuletzt ohne Ende abnimmt. Dieses zu zeigen, stellen wir der Einfachheit wegen folgende Gleichung fest:

$$\pm R_h = \varrho_h \ ,$$

wo also ϱ_h den numerischen Werth von R_h bedeutet, so hat man entweder:

$$\varrho_h = (U_{k_{h+1}} - U_{k_{h+2}}) + (U_{k_{h+3}} - U_{k_{h+4}}) + (U_{k_{h+5}} - U_{k_{h+6}}) + \ldots (\alpha)$$

oder:

$$\varrho_h = U_{k_{h+1}} - (U_{k_{h+2}} - U_{k_{h+3}}) - (U_{k_{h+4}} - U_{k_{h+5}}) - \ldots,$$

und statt der letzteren Gleichung auch folgende

$$U_{k_{h+1}} - \varrho_h = (U_{k_{h+2}} - U_{k_{h+3}}) + (U_{k_{h+4}} - U_{k_{h+5}}) + \ldots \quad (\beta)$$

Da, nach der Voraussetzung, die Glieder:

$$U_{k_{h+1}},\ U_{k_{h+2}},\ U_{k_{h+3}}, \ldots$$

von der Linken zur Rechten gezählt, numerisch, immer kleiner und kleiner werden, so bieten die in den Klammern enthaltenen Ausdrücke der Gleichungen (α) und (β) nur positive Resultate dar, und wir sind somit zur Aufstellung folgender Ungleichheiten:

$$\varrho_h > (U_{k_{h+1}} - U_{k_{h+2}}),$$

$$o < U_{k_{h+1}} - \varrho_h$$

berechtiget, aus welchen folgende Grenzen für ϱ_h sich ergeben:

$$\varrho_h < U_{k_{h+1}} \text{ und } \varrho_h > U_{k_{h+1}} - U_{k_{h+2}};$$

und da beim Zunehmen von h das Glied $U_{k_{h+1}}$, dem numerischen Werthe nach, kleiner als jede angebbare Größe werden kann, so fließt die Richtigkeit unserer vorigen Behauptung, und mithin auch die des angekündigten Theorems.

Als Folgerung dieses Satzes kann man Folgendes aussprechen: Wenn in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe je zwei auf einander folgender Glieder entgegengesetzte Zeichen haben, so ist zu deren Convergenz das immerwährende und unendliche Abnehmen der Glieder hinreichend.

192. Wir gehen nun zur näherungsweisen Bestimmung von Integralausdrücken durch ohne Ende fortlaufende Reihen über.

Wenn die Differenzialformel $\varphi(x)dx$ zur näherungsweisen Integration vorliegt, und es gelingt die Function $\varphi(x)$ in eine ohne Ende fortlaufende Reihe von Gliedern, die Functionen von x sind, dergestalt zu zerfällen, daß jede dieser Functionen mit dx multiplicirt, als Differenziale einer algebraischen oder exponentiellen Function sich herausstellt, so kann die durch Integration dieser Differenzialausdrücke erhaltene unendliche Gliederreihe von Integralfuntionen, im Bereiche jener Werthe von x, für die die gesammte Reihe convergirend ist, als Integralfunction der vorgelegten Differenzialfor-

mel angesehen werden. Da etwas Allgemeines über das Zerfällen dieser Function nicht mitgetheilt werden kann, so schreiten wir in den folgenden Nrn. zur Anwendung dieses hier in Kürze bezeichneten Integrationverfahrens, und behalten uns vor die noch nöthigen Bemerkungen gelegentlich nachzubringen.

193. Folgende zwei Integralausdrücke:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{Cos.}mx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}}dx\,,\quad \int_0^a \frac{\mathrm{Sin.}mx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}}dx\,,$$

in denen $c^2 < 1$, m und a vorläufig beliebige reelle Größen vorstellen, wollen wir durch unendliche und convergente Reihen darzustellen suchen.

Zerfällt man den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}}\,,$$

in eine ohne Ende fortlaufende Gliederreihe, die nach aufsteigenden Potenzen von $\mathrm{Sin.}x^2$ fortgeht, wo also:

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} = 1 + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{Sin.}x^2 + \frac{1.3}{2.4}c^4\,\mathrm{Sin.}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6\,\mathrm{Sin.}x^6 + \ldots$$

erhalten wird, so haben wir, um zur Kenntniß der unendlichen Reihen zu gelangen, die die beiden vorgelegten Integralausdrücke darstellen, nur die Werthe der beiden folgenden Integralausdrücke:

$$\int_0^a \mathrm{Cos.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p}\,dx\,,\quad \int_0^a \mathrm{Sin.}mx\,\mathrm{Sin.}x^{2p}\,dx\,,$$

in denen p irgend eine ganze und positive Zahl bedeutet, zu bestimmen nöthig; denn wenn man nach vollzogener Integration statt p nach und nach die Zahlenwerthe: 0, 1, 2, 3, 4, . . . setzt, dann die so gewonnenen Glieder respective mit:

$$1,\ \frac{1}{2}c^2,\ \frac{1.3}{2.4}c^4,\ \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6,\ \ldots$$

multiplicirt, so erhält man die Glieder der verlangten unendlichen Reihen.

Schließt man die geraden und ganzen Werthe von m, die gleich oder kleiner als 2p sind, von der Untersuchung aus, so kann man, mit Zuziehung der Gleichungen (183) und (184) Nr. 98, die fraglichen zwei Integralien folgendermaßen darstellen:

$$\int_0^a \text{Cos.}mx \,\text{Sin.}x^{2p}\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\varphi(m,p)\,\text{Sin.}mx$$

$$-\varphi(m,p)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2}(2\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma)\text{Sin.}a \\ + \frac{2^2-m^2}{1.2.3.4}(4\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma)\text{Sin.}a^3 \\ + \frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{1.2.3.4.5.6}(6\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma)\text{Sin.}a^5 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p-2)^2-m^2]}{1.2.3.4\ldots(2p-1)2p}(2p\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma)\text{Sin.}a^{2p-1} \end{array}\right.$$

$$\int_0^a \text{Sin.}mx\,\text{Sin.}x^{2p}\, dx =$$

$$= \frac{1}{m}\varphi(m,p)(1 - \text{Cos.}ma)$$

$$-\varphi(m,p)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2}(2\text{Cos.}a\text{Sin.}ma - m\text{Sin.}a\text{Cos.}ma)\text{Sin.}a \\ + \frac{2^2-m^2}{1.2.3.4}(4\text{Cos.}a\text{Sin.}ma - m\text{Sin.}a\text{Cos.}ma)\text{Sin.}a^3 \\ + \frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)}{1.2.3.4.5.6}(6\text{Cos.}a\text{Sin.}ma - m\text{Sin.}a\text{Cos.}ma)\text{Sin.}a^5 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{(2^2-m^2)(4^2-m^2)\ldots[(2p-2)^2-m^2]}{1.2.3.4\ldots(2p-1)2p}(2p\text{Cos.}a\text{Sin.}ma - m\text{Sin.}a\text{Cos.}ma)\text{Sin.}a^{2p-1} \end{array}\right.$$

wo $\varphi(m, p)$ in derselben Bedeutung, als in Nr. 154 auftritt; und die vorgelegten zwei Integralausdrücke werden sonach durch die folgenden, ohne Ende fortlaufenden, convergenten Reihen dargestellt:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\text{Cos.}mx\,dx}{\sqrt{1-c^2\text{Sin.}x^2}} &= I_0 \cdot \frac{1}{m}\text{Sin.}ma \\ &+ I_2\frac{1.c^2\text{Sin.}a}{2(m^2-2^2)}\{2\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma\} \\ &+ I_4\frac{1.3.c^4\text{Sin.}a^3}{2.4(m^2-4^2)}\{4\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma\} \\ &+ I_6\frac{1.3.5.c^6\text{Sin.}a^5}{2.4.6(m^2-6^2)}\{6\text{Cos.}a\text{Cos.}ma + m\text{Sin.}a\text{Sin.}ma\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (I) \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{Sin}.mx\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}.x^2}} = I_0\frac{1}{m}(1-\mathrm{Cos}.ma)$$

$$+ I_2\frac{1.c^2\,\mathrm{Sin}.a}{2(m^2-2^2)}\{2\,\mathrm{Cos}.a\,\mathrm{Sin}.ma - m\,\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Cos}.ma\}$$

$$+ I_4\frac{1.3.c^4\,\mathrm{Sin}.a^3}{2.4(m^2-4^2)}\{4\,\mathrm{Cos}.a\,\mathrm{Sin}.ma - m\,\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Cos}.ma\}$$

$$+ I_6\frac{1.3.5.c^6\,\mathrm{Sin}.a^5}{2.4.6(m^2-6^2)}\{6\mathrm{Cos}.a\mathrm{Sin}.ma - m\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.ma\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (2)$$

wenn man abkürzend folgende Gleichungen feststellt:

$$I_0 = 1 + \frac{1^2.c^2}{2^2-m^2} + \frac{1^2.3^2.c^4}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)} + \frac{1^2.3^2.5^2.c^6}{(2^2-m^2)(4^2-m^2)(6^2-m^2)} + \ldots, \qquad (\alpha)$$

$$I_2 = 1 + \frac{3^2.c^2}{4^2-m^2} + \frac{3^2.5^2.c4}{(4^2-m^2)(6^2-m^2)} + \frac{3^2.5^2.7^2.c^6}{(4^2-m^2)(6^2-m^2)(8^2-m^2)} + \ldots,$$

$$I_4 = 1 + \frac{5^2.c^2}{6^2-m^2} + \frac{5^2.7^2.c^4}{(6^2-m^2)(8^2-m^2)} + \frac{5^2.7^2.9^2.c^6}{(6^2-m^2)(8^2-m^2)(10^2-m^2)} + \ldots,$$

und allgemein

$$I_{2p} = 1 + \frac{(2p+1)^2\,c^2}{(2p+2)^2-m^2} + \frac{(2p+1)^2\,(2p+3)^2\,c^4}{[(2p+2)^2-m^2][(2p+4)^2-m^2]} + \text{in inf.}$$

Bedenkt man ferner die Gleichheiten:

$$2p\,\mathrm{Cos}.a\,\mathrm{Cos}.ma = \frac{2p}{2}\{\mathrm{Cos}.(m+1)a + \mathrm{Cos}.(m-1)a\},$$

$$2p\,\mathrm{Cos}.a\mathrm{Sin}.ma = \frac{2p}{2}\{\mathrm{Sin}.(m+1)a + \mathrm{Sin}.(m-1)a\},$$

$$m\,\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Sin}.ma = \frac{m}{2}\{\mathrm{Cos}.(m-1)a - \mathrm{Cos}.(m+1)a\},$$

$$m\,\mathrm{Sin}.a\,\mathrm{Cos}.ma = \frac{m}{2}\{\mathrm{Sin}.(m+1)a - \mathrm{Sin}.(m-1)a\},$$

so gehen die Gleichungen (1) und (2) auch in folgende über:

$$\int_0^a \frac{\mathrm{Cos}.mxdx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}.x^2}} = I_0\frac{1}{m}\,\mathrm{Sin}.ma$$

$$- \tfrac{1}{2} I_2\frac{1}{2}c^2\,\mathrm{Sin}.a\left\{\frac{\mathrm{Cos}.(m-1)a}{2-m} + \frac{\mathrm{Cos}.(m+1)a}{2+m}\right\}$$

$$- \tfrac{1}{2} I_4\frac{1.3}{2.4}c^4\,\mathrm{Sin}.a^3\left\{\frac{\mathrm{Cos}.(m-1)a}{4-m} + \frac{\mathrm{Cos}.(m+1)a}{4+m}\right\}$$

$$- \tfrac{1}{2} I_6\frac{1.3.5}{2.4.6}c^6\,\mathrm{Sin}.a^5\left\{\frac{\mathrm{Cos}.(m-1)a}{6-m} + \frac{\mathrm{Cos}.(m+1)a}{6+m}\right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (3)$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{Sin.}mx\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} = I_0\,\frac{1}{m}(1-\mathrm{Cos.}ma)$$
$$-\tfrac{1}{2}I_2\,\frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{Sin.}a\left\{\frac{\mathrm{Sin.}(m-1)a}{2-m}+\frac{\mathrm{Sin.}(m+1)a}{2+m}\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}I_4\,\frac{1.3}{2.4}\,c^4\,\mathrm{Sin.}a^3\left\{\frac{\mathrm{Sin.}(m-1)a}{4-m}+\frac{\mathrm{Sin.}(m+1)a}{4+m}\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}I_6\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\,c^6\,\mathrm{Sin.}a^5\left\{\frac{\mathrm{Sin.}(m-1)a}{6-m}+\frac{\mathrm{Sin.}(m+1)a}{6+m}\right\}$$
$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;, \qquad (1)$$

welche, wie die vorhergehenden Gleichungen, für alle Werthe von m bestehen, die nicht von der Form 2k sind, wo k eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

Die oben durch $I_0, I_2, I_4, \ldots I_{2p}, \ldots$ dargestellten unendlichen Reihen betreffend, bemerken wir zuerst, daß dieselben sämmtlich für die so eben erwähnten Werthe von m zu den convergenten gehören, wenn nur $c^2 < 1$ ist, und daß man ferner zur leichteren numerischen Bestimmung derselben aus der oben für I_{2p} aufgestellten Reihe folgende Recursionsgleichung ableiten kann:

$$I_{2p} = \frac{(2p)^2-m^2}{(2p-1)^2\,c^2}(I_{2p-2}-1)\;, \qquad (\beta)$$

die sämmtliche transcendentale Functionen:

$$I_2,\; I_4,\; I_6,\; I_8,\; \ldots\; I_{2p},\; I_{2p+2},\; \ldots$$

als abhängig von der transcendentalen I_0 darstellt.

Diese Function I_0 kann nicht nur durch die obige Gleichung (α), sondern auch durch folgende Gleichung:

$$I_0 = 1-\binom{-\frac{1}{2}}{1}\varphi(m,1)c^2+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\varphi(m,2)c^4-\binom{-\frac{1}{2}}{3}\varphi(m,3)c^6+\text{in inf.} \quad (\gamma)$$

dargestellt werden, wo

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1},\quad \binom{-\frac{1}{2}}{2},\quad \binom{-\frac{1}{2}}{3},\quad \binom{-\frac{1}{2}}{4},\; \ldots$$

die Coefficienten des nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelten Binomiums:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

sind, und

$$\varphi(m,1)\;,\quad \varphi(m,2)\;,\quad \varphi(m,3)\;,\quad \varphi(m,4)\;,\;\ldots$$

aus der Nr. 154 besprochenen Function $\varphi(m, p)$, nämlich aus:

$$\varphi(m, p) = \frac{1.2.3.4 \ldots (2p-1)2p}{(2^2-m^2)(4^2-m^2) \ldots [(2p)^2-m^2]} \qquad (\delta)$$

entspringen, wenn in dieselbe für p nach und nach die Werthe 1, 2, 3, 4, ... eingesetzt werden.

194. Die in der vorhergehenden Nr. gewonnenen Gleichungen bestehen auch dann noch, wenn m in $m\sqrt{-1}$ umgesetzt wird; dieselben bestehen alsdann sogar ohne irgend welche Beschränkung bezüglich die reellen Werthe von m, wovon man sich zum Besten aus den Nrn. 97 und 98 der Integralrechnung II überzeugen kann.

Dieses vorausgesetzt, multipliciren wir die Gleichung (2) vorhergehender Nr. mit $\sqrt{-1}$, addiren dieselbe zur Gleichung (1) derselben Nr. und vertauschen endlich m in $m\sqrt{-1}$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{e^{-mx}\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin}.x^2}} &= I'_0 \frac{1}{m}(1-e^{-ma}) \\ &- I'_2 \frac{1.c^2\,\mathrm{Sin}.a}{2(m^2+2^2)}(2\,\mathrm{Cos}.a + m\,\mathrm{Sin}.a)\,e^{-ma} \\ &- I'_4 \frac{1.3.c^4\mathrm{Sin}.a^3}{2.4(m^2+4^2)}(4\,\mathrm{Cos}.a + m\,\mathrm{Sin}.a)\,e^{-ma} \\ &- I'_6 \frac{1.3.5.c^6\,\mathrm{Sin}.a^5}{2.4.6.(m^2+6^2)}(6\,\mathrm{Cos}.a + m\,\mathrm{Sin}.a)\,e^{-ma} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (5)\end{aligned}$$

wo abkürzend

$$I'_0 = 1 + \frac{1^2 c^2}{2^2+m^2} + \frac{1^2.3^2\,c^4}{(2^2+m^2)(4^2+m^2)} + \frac{1^2.3^2.5^2\,c^6}{(2^2+m^2)(4^2+m^2)(6^2+m^2)} + \ldots (\alpha')$$

gesetzt wurde, und wo man, wenn p was immer für eine ganze und positive Zahl bedeutet, folgende Recursionsgleichung:

$$I'_{2p} = \frac{(2p)^2+m^2}{(2p-1)^2 c^2}(I'_{2p-2} - 1) \qquad (\beta')$$

zur Bestimmung der Größen I'_2, I'_4, I'_6, ... hat. Anstatt den Werth von I'_0 durch die Gleichung (α') darzustellen, kann man, analog wie bei I_0, auch folgende Gleichung feststellen:

$$I'_0 = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}\varphi'(m, 1)c^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\varphi'(m, 2)c^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3}\varphi'(m, 3)c^6 + \ldots, \qquad (\gamma')$$

wo man für jede ganze Zahl p die Gleichung:

$$\varphi'(m, p) = \frac{1.2.3.4\ \ldots\ (2p-1)2p}{(2^2+m^2)(4^2+m^2)\ \ldots\ [(2p)^2+m^2]} \qquad (\delta')$$

hat.

195. Die in den vorhergehenden zwei Nrn. gewonnenen Resultate wollen wir nun für den Fall des unendlichen Zunehmens der oberen Integrationsgrenze oder der Größe a umformen.

Wird in der Gleichung (5) $a = \infty$ angenommen, so erhält man, für jeden positiven Werth von m, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx}\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} = \frac{1}{m} I_0' \,. \qquad (6)$$

Wenn in derselben Gleichung (5) m in $m\sqrt{-1}$ umgesetzt und $a = \infty$ angenommen wird, so erhält man, mit Beachtung der Gleichung (I) Nr. 151 und des Umstandes daß alsdann I_0' in I_0 übergeht, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} = \frac{1}{m\sqrt{-1}} I_0 \,,$$

welche in folgende zwei Gleichungen zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos.}mx\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} &= 0\,, \\ \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}mx\,dx}{\sqrt{1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2}} &= \frac{1}{m} I_0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

die, mit Ausnahme des Nullwerthes und der geraden, ganzen Werthe von m, für alle anderen reellen Werthe dieser Größe abgeleitet, somit auch nur für diese Werthe als bestehend anzusehen sind.

196. Die Gleichungen der vorangehenden Nr. bestehen für alle Werthe von c, die numerisch kleiner als die Einheit sind, daher kann man durch Differenziation dieser Gleichungen nach c die Werthe neuer Integralausdrücke ableiten, welche für dieselben Werthe von c gleichfalls bestehen werden.

I. Differenzirt man zuerst die erste der Gleichungen (7) nach c, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{c\,\mathrm{Sin.}x^2\,\mathrm{Cos.}mx\,dx}{(1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0\,;$$

diese Gleichung kann auch folgendermaßen gestellt werden:

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{\{1-(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)\}\operatorname{Cos}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}} = o\,,$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.mx\,dx}{\sqrt{1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2}}\,,$$

daher hat man, mit Beachtung der ersten der Gleichungen (7),

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}} = o\,.$$

Differenzirt man nun diese Gleichung nach c, und verfährt auf gleiche Weise wie vorhin, so gelangt man, mit Zuziehung der so eben aufgestellten Gleichung, auf:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{5}{2}}} = o\,.$$

Wird auf diesem Wege fortgefahren, so gelangt man endlich zur allgemeinen Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = o\,, \tag{8}$$

die für alle ganzen und positiven Zahlenwerthe von n, für alle Werthe von c, die numerisch kleiner als die Einheit sind, wie für die Werthe von m stattfindet, für welche die Gleichungen (7) Bestand haben.

II. Wird auch die zweite der Gleichungen (7) vorhergehender Nr. nach c differenzirt, so ergiebt sich zunächst:

$$\int_0^\infty \frac{c \operatorname{Sin}.x^2 \operatorname{Sin}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{m}\frac{dI_0}{dc}\,;$$

da man dieser Gleichung auch folgende Form geben kann:

$$\int_0^\infty \frac{\{1-(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)\}\operatorname{Sin}.mx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{c}{m}\frac{dI_0}{dc}\,,$$

so hat man auch, mit Beachtung der zweiten der Gleichungen (7),

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}.mx\,dx}{(1-c^2 \operatorname{Sin}.x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{m} I_{0,1}\,, \tag{α_1}$$

wo man

$$I_{0,1} = I_0 + c\,\frac{dI_0}{dc} \qquad (\beta_1)$$

hat.

Wird nun die Gleichung (α_1) nach c differenzirt, so erhält man unmittelbar die folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{3c\,\mathrm{Sin.}x^2\,\mathrm{Sin.}mx\,dx}{(1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{m}\,\frac{dI_{0,1}}{dc},$$

und wenn diese, wie die vorige behandelt wird, ergiebt sich, mit Beachtung der Gleichung (α_1), die folgende:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}mx\,dx}{(1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{m}\,I_{0,2}, \qquad (\alpha_2)$$

wo man

$$I_{0,2} = I_{0,1} + \frac{c}{3}\,\frac{dI_{0,1}}{dc} \qquad (\beta_2)$$

gesetzt hat.

Differenzirt man ferner diese Gleichung (α_2) nach c, und verfährt wie in den zwei vorangehenden Fällen, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}mx\,dx}{(1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{m}\,I_{0,3}, \qquad (\alpha_3)$$

wo abkürzend

$$I_{0,3} = I_{0,2} + \frac{c}{5}\,\frac{dI_{0,2}}{dc} \qquad (\beta_3)$$

angenommen ward.

Wird auf diese Weise fortgefahren, so erhält man endlich:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin.}mx\,dx}{(1-c^2\,\mathrm{Sin.}x^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1}{m}\,I_{0,n}, \qquad (\alpha_n)$$

wo

$$I_{0,n} = I_{0,n-1} + \frac{c}{2n-1}\,\frac{d.I_{0,n-1}}{dc} \qquad (\beta_n)$$

ist.

Wir wollen nunmehr, mit Zuziehung der Gleichungen (β_1), (β_2), (β_3) . . . (β_n) den Werth von $I_{0,n}$ in eine ohne Ende fortlaufende Reihe entwickeln, wodurch erst das bestimmte Integrale in Gleichung (α_n) als völlig bestimmt erscheinen wird.

Zu diesem Zwecke gehen wir zur Gleichung (γ) Nr. 193 zurück, die man auch, wie folgt, stellen kann:

$$I_0 = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \varphi(m, r) c^{2r},$$

wo das Summenzeichen auf alle ganzen und positiven Zahlenwerthe von $r = 1$ bis $r = \infty$ sich erstreckt.

Differenzirt man diese Gleichung nach c, und berücksichtiget die Gleichung (β_1), so erhält man:

$$I_{0,1} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \left(\frac{2r+1}{1}\right) \varphi(m, r) c^{2r};$$

wird diese Gleichung nach c differenzirt und die Gleichung (β_2) berücksichtiget, so findet man:

$$I_{0,2} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \frac{(2r+1)(2r+3)}{1.\quad 3} \varphi(m, r) c^{2r};$$

differenzirt man auch diese Gleichung nach c, und zieht die Gleichung (β_3) in Betracht, so hat man:

$$I_{0,3} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\frac{1}{2}}{r} \frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{1.\quad 3.\quad 5} \varphi(m, r) c^{2r};$$

endlich erhält man, wenn auf gleiche Weise fortgefahren wird,

$$I_{0,n} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r U_r \varphi(m, r) c^{2r},$$

wo abkürzend

$$U_r = \binom{-\frac{1}{2}}{r} \frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5) \ldots (2r+2n-1)}{1.\quad 3.\quad 5 \quad \ldots \quad (2n-1)}$$

angenommen ward. Es ist aber, nach dem eben festgestellten Werthe von U_r,

$$(-1)^r U_r = \frac{1.3.5 \ldots (2r-1)}{2.4.6 \ldots 2r} \cdot \frac{(2r+1)(2r+3) \ldots (2r+2n-1)}{1.\quad 3 \ldots\ldots (2n-1)},$$

oder auch:

$$(-1)^r U_r = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)(2n+1)(2n+3) \ldots (2n+2r-1)}{1.3.5 \ldots (2n-1)\quad 2.\quad 4 \ldots\ldots 2r},$$

daher hat man:

$$(-1)^r U_r = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5) \ldots (2n+2r-1)}{2.\quad 4.\quad 6 \ldots\ldots 2r},$$

oder:

$$(-1)^r U_r = (-1)^r \binom{-\frac{2n+1}{2}}{r},$$

und der obige Werth von $I_{0,n}$ geht in folgenden über:

$$I_{0,n} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\frac{2n+1}{2}}{r} \varphi(m, r)\, c^{2r},$$

oder $I_{0,n}$ wird durch folgende ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$I_{0,n} = 1 - \binom{-\frac{2n+1}{2}}{1} \varphi(m, 1)\, c^2 +$$

$$+ \binom{-\frac{2n+1}{2}}{2} \varphi(m, 2)\, c^4 - \binom{-\frac{2n+1}{2}}{3} \varphi(m, 3)\, c^6 + \dots$$

oder auch durch folgende:

$$I_{0,n} = 1 + \frac{2n+1}{2} \varphi(m, 1)\, c^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)}{2.\quad 4.} \varphi(m, 2)\, c^4 +$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{2.\quad 4.\quad 6} \varphi(m, 3)\, c^6 + \text{in inf.} \tag{I}$$

gegeben, welche, für alle Werthe von c, die numerisch kleiner als die Einheit sind und bei den in den vorhergehenden Nrn. festgestellten Werthen von m, zu den convergenten gehört, oder einen endlichen und völlig bestimmten Werth darbietet.

Für diesen Werth von $I_{0,n}$ hat man, nach Gleichung (α_n),

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}mx\,dx}{(1-c^2\,\text{Sin.}x^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1}{m} I_{0,n} \tag{9}$$

die für alle ganzen und positiven Werthe von n, den Nullwerth mitbegriffen stattfindet.

197. Der in den letzten Nrn. befolgte Gang den Werth eines Integralausdruckes, zumal eines bestimmten, als algebraische Summe unendlich vieler bekannten oder bestimmbaren Integralausdrücke darzustellen, kann auch falsche Resultate hervorrufen, wenn nicht alle Umstände gehörig erwogen werden, unter denen diese als bekannt vorausgesetzten Integralausdrücke erhalten worden sind. Namentlich verdient der Fall eigens besprochen und beleuchtet zu werden, wenn diese bekannten Integralausdrücke nur als Grenzwerthe auftreten, deren wahren Werthe aber, entweder völlig unbestimmt sind, oder um unendlich kleinwerdende Größen von diesen Grenzwerthen abweichen.

Wenn z. B. bei der Ausmittelung des bestimmten Integralausdruckes:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Cos.} ax\, dx ,$$

die folgende ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \frac{x^8}{1.2.3.4} - \frac{x^{10}}{1.2.3.4.5} + \ldots ,$$

die den Werth von e^{-x^2} darstellt, wie auch die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{2r} \operatorname{Cos.} ax\, dx = o ,$$

die streng genommen nur eine Grenzgleichung ist, zu Grunde gelegt wird, so wird man auf das offenbar unrichtige Resultat:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Cos.} ax\, dx = o$$

gelangen. Der Grund hiervon ist eines Theils darin zu suchen, daß der Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty x^{2r} \operatorname{Cos.} ax\, dx$$

eine von Null verschiedene, unbestimmte, jedoch unendlich kleinwerdende Größe ist, wovon man sich zum Deutlichsten aus der zweiten der Gleichungen (I) Nr. 157 überzeugen kann, wenn man daselbst

$$n = 2p \text{ und } a = \omega$$

sein läßt, wo p ganz und positiv, und ω eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt; und anderen Theils, daß eine Summe unendlich vieler, unendlich kleinwerdender Glieder, auch ein von Null verschiedenes Resultat darbieten kann: und in der That haben wir auch in Nr. 162 wahrzunehmen Gelegenheit gehabt, daß wenn man Cos.ax in eine ohne Ende fortlaufende Reihe auflöst, dann gliedweise mit $e^{-x^2}dx$ multiplicirt und von $x=0$ bis $x=\infty$ integrirt, daß man alsdann den Werth des fraglichen bestimmten Integralausdruckes durch die endliche Größe

$$\tfrac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

ausgedrückt erhält.

Eben so würde man auf ein unrichtiges Resultat gelangen, wenn man bei der Ausmittelung des bestimmten Integrals:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin.} ax\, dx ,$$

die unendlich fortlaufende Reihe für e^{-x^2} zu Grunde legen wollte: auch hier würde man, bei Außerachtlassung des Umstandes, daß die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{2p+1} \operatorname{Sin}.ax\,dx = o\ ,$$

nur den Grenzwerth des Integralausdruckes zur Linken vom Gleichheitszeichen darstellt, auf das unrichtige Resultat:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin}.ax\,dx = o$$

gelangen; während, wenn die Function Sin.ax in eine Reihe aufgelöst wird, ein von Null verschiedenes und endliches Resultat, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, als Werth dieses Integrals sich herausstellt.

Löst man nun Sin.ax in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortgehende Reihe auf, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin}.ax\,dx =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-x^2} x dx - \frac{a^3}{1.2.3}\int_0^\infty e^{-x^2} x^3 dx + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}\int_0^\infty e^{-x^2} x^5 dx - \ldots;$$

läßt man in den bestimmten Integralausdrücken zur Rechten vom Gleichheitszeichen x^2 in x übergehen, so ändern sich die Integrationsgrenzen nicht, und man erhält auch:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin}.ax\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ a\int_0^\infty e^{-x} dx - \frac{a^3}{1.2.3}\int_0^\infty e^{-x} x dx + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}\int_0^\infty e^{-x} x^2 dx - \ldots \right\};$$

setzt man in Gleichung (12) Nr. 140, m = 1, so hat man, für jeden ganzen und positiven Werth von p,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^p dx = 1.2.3.4.\ \ldots\ p\ ,$$

daher geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin}.ax\,dx = \tfrac{1}{2}\left\{ a - \frac{1.a^3}{1.2.3} + \frac{1.2.a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{1.2.3\,a^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \right\}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von a^{2p+1}, im Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen, durch C_p, so hat man:

$$C_p = \frac{(-1)^p}{2}\cdot\frac{1.2.3.\ \ldots\ .\ p}{1.2.3.\ \ldots\ (2p+1)}\ ,$$

oder auch:

$$C_p = \frac{(-1)^r}{2} \cdot \frac{1.2.3 \ldots p}{2.4.6 \ldots 2p} \cdot \frac{1}{1.3.5. \ldots (2p+1)},$$

woraus endlich:

$$C_p = \frac{(-1)^r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{2p+1}} \cdot \frac{1}{1.3.5.7 \ldots (2p+1)}$$

erhalten wird, und es ist:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{Sin.} ax\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3}{1.3} + \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^5}{1.3.5} - \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^7}{1.3.5.7} + \ldots \right\},$$

oder auch viel allgemeiner:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \operatorname{Sin.} bx\, dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left\{ \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^3}{1.3} + \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^5}{1.3.5} - \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^7}{1.3.5.7} + \ldots \right\} \quad (10)$$

Die Glieder der innerhalb der Klammern enthaltenen Reihe nehmen, von der Linken zur Rechten gezählt, ohne Ende ab, und da dieselben gliedweise Abwechselungen der Zeichen eingehen: so convergirt diese Reihe für alle reellen Werthe von a und b. Die letzte Gleichung besteht jedoch, vermöge der Gleichungen, die wir bei der Ableitung derselben zu Grunde legten, nur für positive Werthe von a und für alle reellen Werthe von b.

198. Nicht immer gelingt es, in der zu integrirenden Differenzialformel $\varphi(x)dx$, die Function $\varphi(x)$ dergestalt in eine unendliche Reihe aufzulösen, daß die entsprechende unendliche Reihe der Integralfunction im Bereiche der Integrationsgrenzen der Variabeln, zu den convergenten gehöre: wodurch der bis jetzt befolgte Gang, Integralien durch unendliche Reihen darzustellen, den Charakter der Allgemeinheit ablegt. Wir werden zwar, am Schlusse dieses Kapitels, ein ganz allgemeines Verfahren, Integralien näherungsweise zu bestimmen mittheilen; gleichwohl erachten wir es für vortheilhafter, in solchen Fällen, zuerst keines der sonstigen Hülfsmittel der Analyse unversucht zu lassen, bevor zu diesem allgemeinen Verfahren geschritten wird; denn das Allgemeine ermangelt nur zu oft der Kürze, die ein Haupterforderniß einer guten Näherungsmethode ist.

Zunächst legen wir uns folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin.} x)\, dx$$

zur Ausmittelung vor.

Nach dem bis jetzt befolgten Wege wären wir lediglich darauf angewiesen, die Function:

$$\log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von Sin.x geordnete, ohne Ende fortlaufende Reihe aufzulösen; wir hätten alsdann, für jeden reellen Werth von a, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)\,dx =$$

$$= \log.(1+a^2)\int_0^\infty dx + \frac{2a}{1+a^2}\int_0^\infty \mathrm{Sin}.x\,dx - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2\int_0^\infty \mathrm{Sin}.x^2 dx +$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^3\int_0^\infty \mathrm{Sin}.x^3 dx - \tfrac{1}{4}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^4\int_0^\infty \mathrm{Sin}.x^4 dx + \ldots\ldots;$$

und da das erste, dritte, fünfte u. s. w. Glied dieser unendlichen Reihe, jedes für sich, einen unendlich großwerdenden Werth darbietet, so leuchtet sofort die Unbrauchbarkeit dieser Reihe zur Bestimmung des vorliegenden Integrals ein. Wir verlassen daher diesen Weg und schicken uns an den Werth dieses Integrals auf einem anderen Wege zu erörtern.

Nach Nr. 487, II hat man, wenn in der Gleichung (a) daselbst

$$k = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = o, \quad a_3 = o, \ldots$$

angenommen wird, die Gleichung:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)\,dx\,,$$

falls folgende Bedingungsgleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x) + \log.(1+a^2-2a\,\mathrm{Sin}.x)\}\,dx = o$$

stattfindet.

Um nun über das Statthaben dieser Bedingungsgleichung zu entscheiden, stelle man der Kürze wegen den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen durch u vor, so hat man auch:

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\{(1+a^2)^2-4a^2\,\mathrm{Sin}.x^2\}\,dx$$

oder:

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.\{1+a^4+2a^2\,\mathrm{Cos}.2x\}\,dx$$

und, wenn man x in $\frac{x}{2}$ übergehen läßt,

$$u = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \log.(1+a^4+2a^2 \operatorname{Cos}.x)\,dx\ ,$$

oder endlich, mit Beziehung der Gleichungen (64) und (65) Nr. 161, wenn man $a^2 \leqq 1$ voraussetzt,

$$u = o\ ,$$

woraus augenfällig das Stattbaben der obigen Bedingungsgleichung dargethan ist. Man hat daher auch, unter der Annahme $a^2 \leqq 1$,

$$\int_0^{\infty} \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin}.x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin}.x)\,dx\ .$$

Wird nun der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in eine nach aufsteigenden Potenzen von Sin.x, ohne Ende fortlaufende Reihe aufgelöst, so hat man:

$$\int_0^{\infty} \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin}.x)\,dx =$$

$$= \log.(1+a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{2a}{1+a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x\,dx - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x^2\,dx +$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x^3\,dx - \tfrac{1}{4}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x^4\,dx + \ldots\ldots$$

oder auch, nach geschehener Absonderung der mit den geraden, von denen mit ungeraden Potenzen von Sin.x behafteten Glieder,

$$\int_0^{\infty} \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin}.x)\,dx = \tfrac{\pi}{2}\log.(1+a^2) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x^{2k-1}\,dx - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}.x^{2k}\,dx\ ,$$

wo die Summenzeichen auf alle ganzen Zahlenwerthe von k bezogen sind.

Berücksichtiget man nun die Gleichungen (42) und (44) Nr. 153, so erhält man:

$$\int_0^{\infty} \log.(1+a^2+2a \operatorname{Sin}.x)\,dx =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left\{\log.(1+a^2) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2k}\cdot\frac{1.3.5.7\ \ldots\ 2k-1}{2.4.6.8\ \ldots\ 2k}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k}\right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2k-1}\cdot\frac{2.4.6.8\ \ldots\ 2k-2}{1.3.5.7.9\ \ldots\ 2k-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k-1}\ ;$$

vertauscht man aber in dieser Gleichung a in —a und addirt die so umgeformte zur ursprünglichen Gleichung, so hat man auch:

$$\int_0^\infty \log.\left\{1+a^4+2a^2\,\mathrm{Cos}.2x\right\} dx =$$

$$= \pi\left\{\log.(1+a^2) - \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k}\cdot\frac{1.3.5.7\;.\;.\;.\;(2k-1)}{2.4.6.8\;.\;.\;.\;.\;2k}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k}\right\};$$

allein wenn $a^2 \leqq 1$ ist, hat man nach Gleichung (103) Nr. 188,

$$\int_0^\infty \log.(1+a^4+2a^2\,\mathrm{Cos}.2x)\,dx = 0\,,$$

wenn man nämlich am angeführten Orte x in 2x übergehen läßt; daher hat man:

$$\log.(1+a^2) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k}\cdot\frac{1.3.5.7\;.\;.\;.\;(2k-1)}{2.4.6.8\;.\;.\;.\;.\;2k}\cdot\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k},$$

und die obige Gleichung bietet folgendes einfachere Resultat dar:

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{2.4.6.8\;.\;.\;(2k-2)}{1.3.5.7.9\;.\;.\;(2k-1)}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k-1},$$

oder auch beim Weglassen der Summenzeichen,

$$\int_0^\infty \log.(1+a^2+2a\,\mathrm{Sin}.x)\,dx =$$

$$= \frac{2a}{1+a^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^7 + \ldots, \quad (11)$$

welche Gleichung für alle reellen Werthe von a besteht, die numerisch gleich oder kleiner als die Einheit sind; für alle andern Werthe von a hingegen, nimmt das fragliche Integrale einen unendlich groß werdenden Werth an.

Wenn auch in der obigen, den Werth von $\log.(1+a^2)$ darstellenden Gleichung das Summenzeichen wegbleibt, so hat man auch:

$$\log.(1+a^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^6 + \ldots, \quad (\alpha)$$

die gleichfalls für alle Werthe von a, welche numerisch gleich oder kleiner als die Einheit sind, Bestand hat.

Ferner hat man:

$$\log.\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = \log.(1+b^2) - \log.b^2\,;$$

wenn daher $b^2 \geqq 1$ ist, so darf, in der obigen Gleichung (α), $\frac{1}{b}$ statt a gesetzt werden, wodurch man auf folgende Gleichung geführt wird:

$$\log.(1+b^2) - \log.b^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)^6 + \ldots, \qquad (\beta)$$

welche für alle Werth von b besteht, die gleich oder größer als die Einheit sind.

199. Den Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx,$$

wo α irgend eine reelle Größe bedeutet, haben wir in Nr. 159 Gleichung (57), falls die untere Integrationsgrenze $a = 0$ ist, bereits angegeben; wenn aber a irgend eine positive und endliche, reelle Größe vorstellt, so dürfte es kaum möglich sein, die Differenzialfunction:

$$\frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx$$

in eine ohne Ende fortlaufende Reihe dermaßen aufzulösen, daß durch Integration der einzelnen Glieder derselben eine zur numerischen Bestimmung des vorgelegten Integrals taugliche Reihe gewonnen werde. Hingegen gelangt man auf folgendem Wege sehr bald zu einer convergenten Reihe.

Es ist nämlich:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx - \int_0^a \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx,$$

und mit Zuziehung der oben citirten Gleichung (57) erhält man sofort:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx;$$

wird nun in den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, die bekannte Reihe für $\text{Sin}.\alpha x$ gesetzt und dann gliedweise von $x = 0$ bis $x = a$ integrirt, so erhält man die Gleichung:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Sin}.\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \alpha a + \frac{1}{3}\cdot\frac{(\alpha a)^3}{1.2.3} - \frac{1}{5}\,\frac{(\alpha a)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{7}\,\frac{(\alpha a)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots, \quad (12)$$

die für alle positiven Werthe von a und α abgeleitet, also auch nur für diese Werthe besteht, und, wenn überdieß noch diese Größen endlich vorausgesetzt werden, auch zur numerischen Bestimmung des fraglichen Integrals gut geeignet ist.

200. Ein ganz ähnliches Bewenden hat es mit allen im vorangeschickten Kapitel, zwischen den Grenzen 0 und ∞ ausgemittelten bestimmten Integralausdrücken.

I. Legt man nämlich die Gleichung (62) Nr. 160 zu Grunde, so erhält man zunächst:

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \int_0^a e^{-\alpha x^2} dx$$

und wenn die Function $e^{-\alpha x^2}$ in eine, nach aufsteigenden Potenzen von x fortgehende Reihe aufgelöst wird, erhält man:

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - a\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{\alpha a^2}{1} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^2 a^4}{1.2} - \frac{1}{7}\frac{\alpha^3 a^6}{1.2.3} + \ldots\right\}, \quad (13)$$

welche Gleichung für alle reellen und positiven Werthe von a und α besteht.

II. Legt man ferner die Gleichung (63) derselben citirten Nr. zum Grunde, so findet man die Gleichung:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - 2\sqrt{a}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{\alpha a}{1} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^2 a^2}{1.2} - \frac{1}{7}\frac{\alpha^3 a^3}{1.2.3} + \ldots\right\}, \quad (14)$$

die für dieselben Werthe von a und α als die obige Bestand hat.

III. Wenn endlich die Gleichungen (77) Nr. 166 zu Grunde gelegt, b in α umgetauscht und sowohl $\mathrm{Cos}.\alpha x$ als $\mathrm{Sin}.\alpha x$ in Reihen aufgelöst werden, erhält man:

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} - 2\sqrt{a}\left\{1 - \frac{1}{5}\frac{\alpha^2 a^2}{1.2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha^4 a^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{13}\frac{\alpha^6 a^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}, \quad (15)$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}.\alpha x}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} - 2\sqrt{a}\left\{\frac{1}{3}\frac{\alpha a}{1} - \frac{1}{7}\frac{\alpha^3 a^3}{1.2.3} + \frac{1}{11}\frac{\alpha^5 a^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}, \qquad (16)$$

welche, wie die vorangehenden zwei Gleichungen, nur für positive Werthe von a und α bestehen.

201. Bei den in den zwei letzten Nrn. behandelten bestimmten Integralien setzten wir die Werthe derselben, bei der Annahme des Nullwerthes für die unteren und des unendlich großwerdenden Werthes für die oberen Integrationsgrenzen, als gegeben voraus; es giebt aber Integralausdrücke, wie etwa die folgenden:

$$\int_a^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{dx}{x}, \quad \int_a^{\infty} \mathrm{Cos}.\alpha x\,\frac{dx}{x} \text{ u. d. m.},$$

die, wenn a=0 angenommen wird, nicht nur unausgemittelt, sondern geradezu unausmittelbar sind (Integralrechnung III Nr. 106): wo sonach der in den beiden letzten Nrn. befolgte Weg keine Anwendung finden kann. Da aber dennoch auch dergleichen Integralausdrücke durch ohne Ende fortlaufende Reihen ausdrückbar sind (wenn nämlich $a > 0$ ist), so wollen wir uns in der vorliegenden und den folgenden Nrn. mit der Herstellung einiger derselben befassen.

Man hat

$$\int_a^{\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x} - \int_0^{a}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x};$$

wird nun die Gleichung (59) Nr. 159 berücksichtiget, die nur für positive Werthe von α und β, welche von Null verschieden sind, abgeleitet wurde, so geht die so eben aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$\int_a^{\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x} = \log.\frac{\beta}{\alpha} - \int_0^{a}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x};$$

ferner hat man:

$$\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = -(\alpha-\beta) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{1.2}x - \frac{\alpha^3-\beta^3}{1.2.3}x^2 + \frac{\alpha^4-\beta^4}{1.2.3.4}x^3 - \ldots,$$

daher geht auch die vorige Gleichung über in:

$$\int_a^{\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\frac{dx}{x} = \log.\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{1}a - \frac{\alpha^2-\beta^2}{1.2}\frac{a^2}{2} + \frac{\alpha^3-\beta^3}{1.2.3}\frac{a^3}{3} + \ldots,$$

der man auch folgende Form geben kann:

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x}\frac{dx}{x}+\log.\alpha-\frac{\alpha a}{1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2a^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{\alpha^3a^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{\alpha^4a^4}{1.2.3.4}-\ldots=$$

$$=\int_a^\infty e^{-\beta x}\frac{dx}{x}+\log.\beta-\frac{\beta a}{1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2a^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^3a^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{\beta^4a^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

Fassen wir nun der größeren Einfachheit wegen den Fall $a=1$ ins Auge, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}\frac{dx}{x}+\log.\alpha-\frac{\alpha}{1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\ldots=$$

$$=\int_1^\infty e^{-\beta x}\frac{dx}{x}+\log.\beta-\frac{\beta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{\beta^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{\beta^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

und da, wie aus dem bis jetzt Mitgetheilten hervorgeht, die Größen α und β von einander völlig unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur insofern bestehen, als ein jeder der Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen eine, von α sowohl als von β unabhängige, numerische Größe vorstellt. Stellt man sonach diese Größe durch c vor, so hat man die Gleichung:

$$c=\int_1^\infty e^{-\alpha x}\frac{dx}{x}+\log.\alpha-\frac{\alpha}{1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\ldots, \quad (a)$$

in der c für jeden Werth von α ein und denselben, bis jetzt zwar noch unbekannten, numerischen Werth bedeutet.

Um diese Größe c zu bestimmen, reicht es hin den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen für irgend einen Werth von α zu bestimmen. Zu diesem Zwecke löse man die Function $e^{-\alpha x}$ in eine unendliche Reihe auf, so ergiebt sich:

$$\frac{e^{-\alpha x}}{x}=\frac{1}{x}-\alpha+\frac{\alpha^2}{1.2}x-\frac{\alpha^3}{1.2.3}x^2+\ldots;$$

multiplicirt man beide Theile, links und rechts vom Gleichheitszeichen, mit dx und integrirt dann von $x=1$ bis $x=p$, so hat man für jeden positiven, übrigens noch so großen Werth von p die Gleichung:

$$\int_1^p e^{-\alpha x}\frac{dx}{x}=\log.p-\alpha p+\frac{1}{2}\frac{(\alpha p)^2}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{(\alpha p)^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$+\alpha-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3}-\frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}+\ldots;$$

versetzt man nun p in den Zustand des unendlichen Zunehmens, und addirt dann diese Gleichung zu der vorangehenden (a), so erhält man:

$$c = \text{Lim}:\left\{\log.\alpha p - \alpha p + \frac{1}{2}\frac{(\alpha p)^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{(\alpha p)^3}{1.2.3} + \ldots\right\},$$

wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Zunehmen der positiven Größe p Bezug hat, und die Größe α, mit Ausnahme des unendlich kleinwerdenden Werthes, aller positiven Werthe fähig ist. Stellt man sonach unter k was immer für eine unendlich großwerdende Größe vor, so hat man folgende viel einfachere Grenzgleichung:

$$c = \text{Lim}:\left\{\log.k - k + \frac{1}{2}\frac{k^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots\right\} \qquad \text{(b)}$$

zur Bestimmung von c, in der nunmehr das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Wachsen von k zu beziehen ist.

Auf dieselbe Grenzgleichung, zur Bestimmung der Größe c, wird man geführt, wenn man, in der obigen Gleichung (a), statt α die unendlich großwerdende Größe k setzt; man hat nämlich alsdann:

$$\text{Lim}: \int_1^\infty e^{-kx}\frac{dx}{x} = o\,,$$

die dieselbe Grenzgleichung (b) hervorruft.

Da man jedoch, was die numerische Bestimmung von c betrifft, einen endlichen Werth für k in die Grenzgleichung (b) einsetzen muß, so wollen wir uns noch in eine Erörterung über die Ergänzung des Werthes von c einlassen, den diese Gleichung bei der Annahme, k stelle eine endliche Größe vor, darbieten wird.

Stellt man den sich ergebenden Werth von c aus Gleichung (b), bei der Annahme eines endlichen Werthes von k, durch c_1 vor, so bietet die Gleichung (a), wenn daselbst statt α diese endliche Größe oder Zahl k eingesetzt wird, für den vollständigen Werth von c folgende Gleichung dar:

$$c = c_1 + \int_1^\infty e^{-kx}\frac{dx}{x}\;;$$

behandelt man das bestimmte Integrale zur Rechten nach der theilweisen Integration, so hat man auch:

$$c = c_1 + \frac{1}{ke^k} - \frac{1}{k}\int_1^\infty e^{-kx}\frac{dx}{x^2}\;;$$

dieses bestimmte Integrale wiederum auf dieselbe Weise behandelt, erhält man:

$$c = c_1 + \frac{1}{ke^k} - \frac{1}{k^2 e^k} + \frac{1.2}{k^2} \int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^3} ;$$

fährt man in dieser Weise fort, das jedesmal gewonnene bestimmte Integrale rechts vom Gleichheitszeichen nach der theilweisen Integration zu behandeln, so findet man endlich:

$$c = c_1 + \frac{1}{ke^k}\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1.2}{k^2} - \frac{1.2.3}{k^3} + \ldots (-1)^{k-1} \cdot \frac{1.2.3\ldots(k-1)}{k^{k-1}}\right) + R_k$$

wo abkürzend:

$$R_k = \frac{(-1)^k}{k^k} 1.2.3.4.5 \ldots k \int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}}$$

gesetzt wurde.

Da die Größe R_k nicht bestimmt werden kann, so wollen wir wenigstens zwei Grenzwerthe aufstellen, innerhalb deren der Werth derselben fallen muß.

Stellt man unter ω eine positive und unendlich kleinwerdende Größe vor, so hat man, nach Gleichung (9) Nr. 36,

$$\int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}} = \omega \left\{ e^{-k} + \frac{e^{-k(1+\omega)}}{(1+\omega)^{k+1}} + \frac{e^{-k(1+2\omega)}}{(1+2\omega)^{k+1}} + \text{in inf.} \right\} ;$$

aus dieser Gleichung wird man sofort auf folgende Ungleichheit geführt:

$$\int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}} < \omega \left\{ e^{-k} + e^{-k(1+\omega)} + e^{-k(1+2\omega)} + \text{in inf.} \right\} ,$$

der man auch folgende Form geben kann:

$$\int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}} < e^{-k} . \omega \left\{ 1 + e^{-k\omega} + e^{-2k\omega} + e^{-3k\omega} + \text{in inf.} \right\} ,$$

die, mit Zuziehung derselben citirten Gleichung (9), auf folgende Ungleichheit führt:

$$\int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}} < e^{-k} \int_0^\infty e^{-kx} dx ,$$

oder, wenn die Integration zur Rechten vom Ungleichheitszeichen ausgeführt wird, auf:

$$\int_1^\infty e^{-kx} \frac{dx}{x^{k+1}} < \frac{1}{ke^k} .$$

Wenn daher der oben für R_k festgestellte Werth beachtet wird, so hat man:

$$R_k > o \text{ und } R_k < (-1)^k . \frac{1.2.3.4 \ldots k}{k^{k+1}} \cdot \frac{1}{e^k} \,;$$

und wenn θ was immer für eine positive Zahl vorstellt, so kann man R_k, wie folgt, darstellen:

$$R_k = (-1)^k . \frac{1.2.3.4 \ldots k}{k^{k+1}} \cdot \frac{1}{e^{k+\theta}} \,.$$

Es geht sonach der oben für c gefundene Werth, wenn der Werth von c_1 eingeführt wird, in folgenden über:

$$\begin{aligned} c = \log.k - k + \frac{1}{2}\frac{k^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{k^4}{1.2.3.4} - \text{in inf.} \\ + \frac{1}{ke^k}\left\{1 - \frac{1}{k} + \frac{1.2}{k^2} - \frac{1.2.3}{k^3} + \ldots (-1)^{k-1} . \frac{1.2.3 \ldots (k-1)}{k^{k-1}}\right\} \\ + (-1)^k . \frac{1.2.3.4 \ldots k}{k^{k+1}} \cdot \frac{1}{e^{k+\theta}} \,, \qquad (c) \end{aligned}$$

wo θ irgend eine positive und k eine ganze, positive und endliche Zahl vorstellt.

Aus dem letzten Gliede dieser Gleichung, das bei numerischen Bestimmungen außer Acht gelassen wird, kann man den Grad der Genauigkeit ermessen, mit dem c bestimmt wird, falls man für k irgend eine ganze, positive und endliche Zahl annimmt.

So findet man, für $k = 8$, den Ausdruck:

$$- 0{,}000000100755 \, \frac{1}{e^{\theta}} \,,$$

als Werth dieses Gliedes, und da $\theta > 0$ ist, so ersieht man, daß bei der Annahme $k = 8$ die obige Gleichung den Werth von c mit einer Genauigkeit bestimmt, die sich noch auf die siebente Decimalstelle erstreckt.

Man findet sonach bei der Annahme $k = 8$, wenn von der ohne Ende fortlaufenden Reihe, die sich auf der ersten Zeile vorfindet, 32 Glieder gerechnet werden, als Werth dieser Zeile:

$$- 0{,}57725332 \ldots;$$

die zweite Zeile bietet alsdann den Werth:

$$+ 0{,}00003762 \ldots$$

dar, daher hat man, mit einer Genauigkeit, die sich noch auf die siebente Decimale erstreckt,

$$c = - 0{,}57725332 \ldots + 0{,}00003762 \ldots,$$

oder endlich:

$$c = -0{,}5772157 \; . \qquad (\alpha)$$

Der oben aufgestellten, den Werth von c darstellenden Grenzgleichung (b) kann man noch eine andere Form geben, mit deren Herstellung wir uns auch noch beschäftigen wollen.

Man hat nämlich:

$$\frac{e^{-x}-1}{x} = -1 + \frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} - \ldots,$$

also auch:

$$\int_0^k \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = -k + \frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1.2} - \frac{1}{3}\,\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots,$$

daher geht die Gleichung (b) in folgende über:

$$c = \mathrm{Lim:}\left\{\log.k + \int_0^k \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx\right\},$$

wo das Grenzzeichen noch immer auf das unendliche Wachsen von k bezogen wird. Nun hat man, bei der Annahme des unendlichen Zunehmens von k, die Grenzgleichung:

$$\mathrm{Lim:}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k = e^{-x},$$

daher geht die vorige Grenzgleichung über in:

$$c = \mathrm{Lim:}\left\{\log.k + \int_0^k \frac{\left(1-\frac{x}{k}\right)^k - 1}{x}\,dx\right\},$$

und wenn in dem bestimmten Integrale rechts vom Gleichheitszeichen

$$1 - \frac{x}{k} \text{ in } x$$

umgesetzt wird, wodurch diese Grenzgleichung in folgende übergeht,

$$c = \mathrm{Lim:}\left\{\log.k - \int_0^1 \frac{x^k-1}{x-1}\,dx\right\},$$

so hat man:

$$c = \mathrm{Lim:}\left\{\log.k - \int_0^1 (x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \ldots + x+1)dx\right\},$$

oder auch:

$$c = \text{Lim}:\left\{\log.k - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{k}\right)\right\}, \quad (d)$$

welche die oben angekündigte Gleichung ist, von der, namentlich vom Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen derselben noch öfters die Rede sein wird.

Nunmehr die Größe c als bekannt angenommen werden darf, bietet die Gleichung (a) folgende Integralbestimmung dar:

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}\frac{dx}{x} = c - \log.\alpha + \frac{\alpha}{1} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3} - \ldots,$$

und wenn x in $\frac{x}{a}$, α in αa umgesetzt wird, hat man auch:

$$\int_a^\infty e^{-\alpha x}\frac{dx}{x} = c - \log.\alpha a + \frac{\alpha a}{1} - \frac{1}{2}\frac{(\alpha a)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(\alpha a)^3}{1.2.3} - \ldots, \quad (17)$$

in welcher Gleichung a sowohl als α positive und reelle Größen, die von Null verschieden sind, vorstellen, und der numerische Werth von c durch die Gleichung (α) gegeben ist.

Geht in dieser Gleichung:

x in log.x und a in log.a

über, so erhält man auch folgende Gleichung:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}\log.x} = c - \log.(\alpha\log.a)$$

$$+ \frac{\alpha\log.a}{1} - \frac{1}{2}\frac{(\alpha\log.a)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(\alpha\log.a)^3}{1.2.3} - \ldots, \quad (18)$$

in der c und α dieselben Werthe, wie in der vorhergehenden Gleichung haben, und a nicht allein positiv, sondern auch noch größer als Eins sein muß.

202. Auf analoge Weise wie in vorangehender Nr. wollen wir uns an die Ausmittelung des Werthes des bestimmten Integrals:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Cos}.\alpha x}{x}\,dx$$

machen.

Man hat:

$$\int_1^\infty \frac{\text{Cos}.\alpha x - \text{Cos}.\beta x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\text{Cos}.\alpha x - \text{Cos}.\beta x}{x}dx - \int_0^1 \frac{\text{Cos}.\alpha x - \text{Cos}.\beta x}{x}dx;$$

und nach Gleichung (51) Nr. 159 hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x - \mathrm{Cos}.\beta x}{x}\,dx = \log.\frac{\beta}{\alpha},$$

daher hat man auch:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x - \mathrm{Cos}.\beta x}{x}\,dx = \log.\frac{\beta}{\alpha} - \int_0^1 \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x - \mathrm{Cos}.\beta x}{x}\,dx\,;$$

läßt man noch den Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{Cos}.\alpha x - \mathrm{Cos}.\beta x}{x}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortgehende Reihe auf, und integrirt dann gliedweise von $x = 0$ bis $x = 1$, so erhält man:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x - \mathrm{Cos}.\beta x}{x}\,dx = \log.\frac{\beta}{\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{1.2} - \frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4-\beta^4}{1.2.3.4} + \frac{1}{6}\,\frac{\alpha^6-\beta^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

und da α unabhängig von β ist, so wird man, wie bei ähnlichem Anlasse in der vorangehenden Nr., auf folgende Gleichung geführt:

$$c' = \int_1^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x}{x}\,dx + \log.\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\,\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \quad (a')$$

wo c' eine numerische und von α unabhängige Größe ist, mit deren Bestimmung wir uns sogleich beschäftigen wollen.

Setzt man nämlich α als ganze, positive und unendlich großwerdende Zahl voraus, und bezeichnet dieselbe durch k, so hat man zuerst:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{Cos}.kx}{x}\,dx = o\,;$$

denn setzt man in den Gleichungen (98), (99) und (100), Nr. 179 die Function f(x) von der Form $\frac{1}{1+x}$ voraus, so folgert man aus denselben sofort, wenn k in der so eben festgestellten Bedeutung auftritt, folgende zwei Gleichungen:

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}.kx\,\frac{dx}{x+1} = o\,,\qquad \int_0^\infty \mathrm{Sin}.kx\,\frac{dx}{x+1} = o\,,$$

wird in diesen zwei Gleichungen x in x — 1 umgesetzt, so erhält man:

$$\text{Cos.k} \int_1^\infty \frac{\text{Cos.kx}}{x}\,dx + \text{Sin.k} \int_1^\infty \frac{\text{Sin.kx}}{x}\,dx = 0\,,$$

$$\text{Sin.k} \int_1^\infty \frac{\text{Cos.kx}}{x}\,dx - \text{Cos.k} \int_1^\infty \frac{\text{Sin.kx}}{x}\,dx = 0\,,$$

addirt man diese Gleichungen, nachdem die erste mit Cos.k und die zweite mit Sin.k multiplicirt worden ist, so erhält man die angegebene Gleichung.

Macht man sonach dieselbe Annahme über α in der Gleichung (a′), so entsteht die Grenzgleichung:

$$c' = \text{Lim:}\left\{\log.k - \frac{1}{2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{k^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\frac{k^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}, \quad (b')$$

wo das Grenzzeichen Lim: auf das unendliche Zunehmen der ganzen und positiven Zahl k bezogen wird.

Wie aus dieser Gleichung der sich ergebende Werth für c′ zu corrigiren sei, falls in derselben k als endliche Zahlengröße auftritt, wollen wir im Folgenden zeigen.

Stellt man den für einen endlichen Werth von k aus (b′) sich ergebenden Werth von c′ durch c'_1 dar, so bietet die Gleichung (a′) folgenden Werth für c′ dar:

$$c' = c'_1 + \int_1^\infty \frac{\text{Cos.kx}}{x}\,dx\,.$$

Betrachten wir nun den Fall, wenn k eine ganze, gerade Zahl und von der Form 2m ist, so findet man durch eine successive, theilweise Integration folgende Gleichung:

$$\int_1^\infty \frac{\text{Cos.2mx}}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\text{Cos.2m}}{(2m)^2}\left\{1 - \frac{1.2.3}{(2m)^2} + \frac{1.2.3.4.5}{(2m)^4} - \ldots (-1)^m \frac{1.2.3\ \ldots\ (2m-3)}{(2m)^{2m-4}}\right\}$$

$$- \frac{\text{Sin.2m}}{2m}\left\{1 - \frac{1.2}{(2m)^2} + \frac{1.2.3.4}{(2m)^4} - \ldots (-1)^{m-1} \frac{1.2.3\ \ldots\ (2m-2)}{(2m)^{2m-2}}\right\}$$

$$+ R_m\,,$$

vom Gleichheitszeichen, die 18 ersten Glieder folgenden Werth dar:

$$-0{,}62267\ ;$$

der numerische Werth des Ausdruckes auf der zweiten Zeile derselben Gleichung geht, bei derselben Annahme $m=5$, über in:

$$-0{,}00795\ ,$$

der auf der dritten Zeile befindliche Ausdruck geht in:

$$+0{,}05343\ ,$$

über. Es ist also, vermöge derselben Gleichung,

$$c' = 0{,}57719\ ,$$

und wenn die vierte Decimalstelle, mit Zuziehung der fünften, corrigirt wird, erhält man zur Bestimmung von c' die Gleichung:

$$c' = 0{,}5772$$

welcher Werth, mit dem von c der vorhergehenden Nr. verglichen, auf die Identität der zwei Constanten c und c' zuerst die Vermuthung hinlenkt. Daß dem wirklich so sei, d. h., daß die in der vorhergehenden Nr. öfters zur Sprache gebrachte Größe c mit der Größe c' der vorliegenden Nr. gleichbedeutend sei, wollen wir viel allgemeiner, wie folgt, darthun.

Da man

$$\text{Cos.}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

hat, so hat man auch:

$$\frac{\text{Cos.}x-1}{x} = -\frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

und

$$\int_0^k \frac{\text{Cos.}x-1}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{k^4}{1.2.3.4.} - \frac{1}{6}\,\frac{k^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

wodurch die Grenzgleichung (b′) in folgende übergeht:

$$c' = \text{Lim:}\left\{\log.k + \int_0^k \frac{\text{Cos.}x-1}{x}\,dx\right\},$$

oder auch in:

$$c' = \text{Lim:}\left\{\log.k + \int_0^1 \frac{\text{Cos.}kx-1}{x}\,dx\right\},$$

wo das Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen der ganzen und positiven Zahl k Bezug hat.

Stellt man, wie in Nr. 176 geschah, durch ε eine unbestimmte und unendlich kleinwerdende Größe dar, jedoch daß das Product $k\varepsilon$ unbestimmt und unendlich wachse, so kann man die vorige Gleichung zunächst folgendermaßen stellen:

$$c' = \text{Lim}: \left\{ \log.k + \int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx \right\} ;$$

und da vermöge des in Nr. 151 bewiesenen, nach der getroffenen Annahme über ε, die Grenzgleichung

$$\text{Lim}: \text{Cos}.kx = o\ , \quad \text{von} \quad x = \varepsilon \quad \text{bis} \quad x = 1$$

angenommen werden darf, so geht der zuletzt aufgestellte Werth von c' über in:

$$c' = \text{Lim}: \left\{ \log.k + \int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} \right\},$$

oder auch in:

$$c' = \text{Lim}: \left\{ \log.k\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx \right\} .$$

Behandelt man das innerhalb der Klammern enthaltene bestimmte Integrale auf gleiche Weise, wie das in Nr. 177 ermittelte, d. h., setzt man:

$$\varepsilon = \mu\omega\ ,$$

wo ω eine unendlich kleinwerdende und μ eine ganze, unendlich großwerdende Zahl vorstellt, so hat man, nach Gleichung (10) Nr. 36,

$$\int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx =$$

$$= \omega \left\{ \frac{\text{Cos}.k\omega - 1}{\omega} + \frac{\text{Cos}.2k\omega - 1}{2\omega} + \frac{\text{Cos}.3k\omega - 1}{3\omega} + \ldots + \frac{\text{Cos}.\mu k\omega - 1}{\mu\omega} \right\},$$

oder:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\text{Cos}.kx - 1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\text{Cos}.k\omega}{1} + \frac{\text{Cos}.2k\omega}{2} + \frac{\text{Cos}.3k\omega}{3} + \ldots + \frac{\text{Cos}.\mu k\omega}{\mu}$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\mu}\right),$$

und mit Zuziehung der ersten der Gleichungen (β) Nr. 177,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\text{Cos.}kx-1}{x}dx = \log.\frac{\frac{1}{2}}{\text{Sin.}\frac{k\omega}{2}} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right).$$

Wird nun dieses Ergebniß in die letzte, den Werth von c' darstellende Grenzgleichung eingesetzt, so geht dieselbe über in:

$$c' = \text{Lim}:\left\{\log.\frac{\frac{k}{2}}{\text{Sin.}\frac{k\omega}{2}} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right)\right\},$$

oder, wenn $\mu\omega$ statt ε gesetzt wird,

$$c' = \text{Lim}:\left\{\log.\frac{\frac{k\omega}{2}}{\text{Sin.}\frac{k\omega}{2}} + \log.\mu - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right)\right\};$$

diese Gleichung besteht, wie jene, aus der sie gefolgert wurde, mit einer desto größeren Genauigkeit, je kleiner ω gedacht wird, folglich ist man den Ausdruck $\frac{k\omega}{2}$, als eine unendlich kleinwerdende Größe anzusehen berechtiget; es nähert sich daher der Bruch:

$$\frac{\frac{k\omega}{2}}{\text{Sin.}\frac{k\omega}{2}},$$

ohne Ende der positiven Einheit, folglich dessen Logarithmus dem Nullwerthe, und man hat:

$$c' = \text{Lim}:\left\{\log.\mu - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right)\right\},$$

wo das Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen von μ bezogen ist.

Vergleicht man nun diese Grenzgleichung mit jener (d) der vorangehenden Nr., so hat man:

$$c' = c,$$

w. z. b. w.

Man hat sonach, vermöge der Gleichung (a'),

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{Cos.}\alpha x}{x}dx = c - \log.\alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

und wenn x in $\frac{x}{a}$ und α in αa umgesetzt wird, erhält man die viel allgemeinere Gleichung:

$$\int_a^\infty \frac{\text{Cos.}\alpha x}{x}\,dx = c - \log.\alpha a + \frac{1}{2}\frac{(\alpha a)^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{(\alpha a)^4}{1.2.3.4} + \ldots, \quad (19)$$

in der a sowohl als α von Null verschiedene, positive, reelle Größen vorstellen, und der numerische Werth von c mit einer bis auf die siebente Decimalstelle sich erstreckenden Genauigkeit durch die Gleichung (α) der vorangehenden Nr. gegeben erscheint, oder auch als Grenzwerth einer der folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} c &= \text{Lim}: \left\{\log.k - k + \frac{1}{2}\frac{k^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{k^3}{1.2.3} + \text{in inf.}\right\}, \\ c &= \text{Lim}: \left\{\log.k - \frac{1}{2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{k^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\frac{k^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{in inf.}\right\}, \\ c &= \text{Lim}: \left\{\log.k - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

noch zu ermitteln ist, oder die Größe c in der Gleichung (19) hat denselben numerischen Werth als die Größe c der Gleichungen (17) und (18) der vorhergehenden Nr.

203. Wir wollen uns noch mit der Herstellung einiger aus den Ergebnissen der beiden vorangehenden Nrn. gefolgerten Gleichungen befassen.

Nach §. IV Nr. 155 des vorangehenden Kapitels ist man zur Aufstellung folgender Gleichung berechtiget:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-a(1+x)}\,da\right\} \text{Sin.}\alpha x\,dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{Sin.}\alpha x\,dx\right\} e^{-a}\,da\ ;$$

nun hat man:

$$\int_0^\infty e^{-a(1+x)}\,da = \frac{1}{1+x},$$

und nach der zweiten der Gleichungen (53) Nr. 159,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{Sin.}\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+a^2},$$

daher geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{\text{Sin.}\alpha x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-a}\,da}{\alpha^2+a^2},$$

oder auch, wenn im Integralausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen a in αx umgesetzt wird, und die Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen ihre Plätze vertauschen,

subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so findet man:

$$-\,i\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.\alpha x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{-\alpha}+e^{\alpha}\right)\left\{\alpha+\frac{1}{3}\,\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{1}{5}\,\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\}$$
$$-\frac{i}{2}\left(e^{-\alpha}-e^{\alpha}\right)\left\{-c+\log.\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}+\ldots\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}r\pi\left(e^{-\alpha}-e^{\alpha}\right)+\varphi(\alpha)\,;$$

und da die Größe r unserer Willkühr überlassen bleibt, so können wir dieselbe auch gleich Null annehmen: alsdann müssen wir aber nothwendig die Function $\varphi(\alpha)$ von der Form $\sqrt{-1}\,\psi(\alpha)$ oder $i\psi(\alpha)$ voraussetzen, wo $\psi(\alpha)$ nur noch eine reelle Function von α vorstellen kann. Dieses vorausgesetzt, geht die zuletzt aufgestellte Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}.\alpha x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha}+e^{\alpha}\right)\left\{\alpha+\frac{1}{3}\,\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{1}{5}\,\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha}-e^{\alpha}\right)\left\{-c+\log.\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}+\ldots\right\}$$
$$-\psi(\alpha)\,, \tag{a}$$

und durch Differenziation derselben nach α erhält man auch:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}.\alpha x}{1+x^2}\,x dx =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha}-e^{\alpha}\right)\left\{\alpha+\frac{1}{3}\,\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{1}{5}\,\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha}+e^{\alpha}\right)\left\{-c+\log.\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}+\ldots\right\}$$
$$-\psi_1(\alpha)\,, \tag{b}$$

wo $\psi_1(\alpha)$ den Differenzialquotienten von $\psi(\alpha)$ nach α vorstellt.

Um die Function $\psi(\alpha)$ zu bestimmen, legen wir uns folgende Gleichheit vor:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Sin.}a(1+x)\,dx\right\} da = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \operatorname{Sin.}a(1+x)\,da\right\} e^{-\alpha x}\,dx\ ;$$

nach der ersten Gleichung (47) Nr. 156 hat man:

$$\int_0^\infty \operatorname{Sin.}a(1+x)\,dx = \frac{1}{1+x}\ ;$$

und wegen der Gleichheit:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Sin.}a(1+x)\,dx =$$

$$= \operatorname{Sin.}a \int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Cos.}ax\,dx + \operatorname{Cos.}a \int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Sin.}ax\,dx\ ,$$

hat man, mit Zuziehung der Gleichungen (53) Nr. 159,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{Sin.}a(1+x)\,dx = \frac{\alpha \operatorname{Sin}a}{\alpha^2+a^2} + \frac{a \operatorname{Cos}a}{\alpha^2+a^2}\ ,$$

daher geht die obige Gleichheit in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{Sin.}a}{\alpha^2+a^2}\,da + \int_0^\infty \frac{a \operatorname{Cos.}a}{\alpha^2+a^2}\,da = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\,dx\ ;$$

und wenn ferner in den Integralausdrücken zur Linken vom Gleichheitszeichen a in αx und im Integralausdrucke zur Rechten x in x—1 umgesetzt wird, erhält man endlich:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin.}\alpha x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos.}\alpha x}{1+x^2}\,x dx = e^\alpha \int_1^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x}\,dx\ . \qquad (22)$$

Mit Hülfe dieser Gleichung sind wir die in den Gleichungen (a) und (b) vorkommende Function $\psi(\alpha)$ zu ermitteln im Stande. Substituirt man nämlich die Ergebnisse dieser Gleichungen (a) und (b), wie auch das der Gleichung (17) Nr. 201, wenn daselbst $a=1$ angenommen wird, in die so eben aufgestellte Gleichung (22), so erhält man zur Bestimmung der Function $\psi(\alpha)$ folgenden Zusammenhang:

$$\psi(\alpha) + \psi_1(\alpha) = 0\ ;$$

und um aus dieser Gleichung die Beschaffenheit der Function ψ zu entnehmen, machen wir folgende Annahme:

$$\psi(\alpha) = e^{-\alpha} f(\alpha)\ ,$$

wo $f(\alpha)$ eine neue, wie wir sogleich sehen werden, leicht zu bestimmende Function von α bedeutet. Setzt man nämlich diesen Werth von $\psi(\alpha)$ und den aus dieser Gleichung sich ergebenden Werth für $\psi_1(\alpha)$ in die vorangehende Gleichung, so hat man:

$$e^{-\alpha} f_1(\alpha) = o ;$$

und da der Factor $e^{-\alpha}$, besondere Werthe von α ausgenommen, nicht gleich Null angenommen werden kann, so muß die unbekannte Function von α, nämlich $f(\alpha)$ so beschaffen sein, daß deren Differenzialquotient nach α, für alle Werthe von α in Null übergehe, oder daß man:

$$f_1(\alpha) = o ,$$

habe, welche Gleichung, nach dem Fundamentalsatze der Differenzialrechnung Nr. 16, nur dann bestehen kann, wenn man

$$f(\alpha) = A$$

setzt, wo A eine von α unabhängige Constante bedeutet. Man hat also:

$$\psi(\alpha) = A e^{-\alpha} ;$$

dieser Werth von $\psi(\alpha)$ ist es, den man in die obige Gleichung (a), wie dessen Differenzialquotient nach α, nämlich:

$$\psi_1(\alpha) = - A e^{-\alpha} ,$$

in die Gleichung (b) zu setzen hat, und es erübriget uns, unser beabsichtigtes Ziel zu erreichen, nur noch darzuthun, daß diese von α unabhängige, constante Größe A nur des Nullwerthes fähig sei.

Setzen wir zu diesem Behufe in die Gleichung (a) den eben gefundenen Werth für $\psi(\alpha)$ ein, und sehen zu, was aus derselben wird, wenn man die Annahme $\alpha = \frac{1}{n}$ macht, wo n eine unendlich groß werdende und positive Größe vorstellt.

Ohne große Mühe gelangt man nach vollzogener Substitution auf folgende Grenzgleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2} \text{Lim}: \left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right) \log. \frac{1}{n} - A ,$$

aus der

$$A = \tfrac{1}{2} \text{Lim}: \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{\log. n} ,$$

gezogen wird, wo das Grenzzeichen auf das unendliche Zunehmen von n Bezug hat; da aber der auf das Grenzzeichen folgende Ausdruck, für die so eben erwähnte Annahme der Größe n, in $\frac{0}{0}$ übergeht, so behandle man denselben nach Differenzialrechnung II, Nr. 29, und alsdann erhält man:

$$A = \tfrac{1}{2}\,\text{Lim:}\ \frac{\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \tfrac{1}{2}\,\text{Lim:}\ \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}{n} = 0\,,$$

w. z. b. w.

Es gehen daher die Gleichungen (a) und (b) in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}.\alpha x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha} + e^{\alpha}\right)\left\{\alpha + \frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha} - e^{\alpha}\right)\left\{-c + \log.\alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots\right\},\ (23)$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos}.\alpha x}{1+x^2}\,x dx =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha} - e^{\alpha}\right)\left\{\alpha + \frac{1}{3}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\}$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha} + e^{\alpha}\right)\left\{-c + \log.\alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots\right\},\ \ (24)$$

wo c dieselbe Bedeutung, als in den Nrn. 201 und 202 hat.

205. Auch folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x + \frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x}$$

ist durch convergente Reihen und durch Integralien, die in den vorangehenden Nrn. ermittelt worden sind, ausdrückbar.

Es ist

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x} = \int_0^{\frac{1}{a}} e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{a}}^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x}\,;$$

läßt man in dem ersten der Integralausdrücke zur Rechten x in $\frac{1}{ax}$ und im zweiten dieser Integralausdrücke x in $\frac{x}{a}$ übergehen, so geht jedes derselben in:

$$\int_1^\infty e^{-\left(ax+\frac{a}{x}\right)}\frac{dx}{x}$$

über, daher hat man:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x} = 2\int_1^\infty e^{-\left(ax+\frac{a}{x}\right)}\frac{dx}{x},$$

in welcher Gleichung a als positive, reelle Größe auftreten muß.

Nun hat man:

$$e^{-\frac{a}{x}} = 1 - \frac{\left(\frac{a}{x}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

daher geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x} =$$

$$= 2\int_1^\infty e^{-ax}\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^4} + \ldots\right)dx;$$

ferner findet man:

$$\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^{m+1}} = \frac{e^{-a}}{m} - \frac{a}{m}\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^m},$$

aus der nach und nach folgende Gleichungen gewonnen werden:

$$\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-a}}{1} - \frac{a}{1}\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x},$$

$$\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^3} = \frac{e^{-a}}{2}\left(1 - \frac{a}{1}\right) + \frac{a^2}{1.2}\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x},$$

$$\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^4} = \frac{e^{-a}}{3}\left(1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{1.2}\right) - \frac{a^3}{1.2.3}\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x},$$

$$\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x^5} = \frac{e^{-a}}{4}\left(1 - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{2.3} - \frac{a^3}{1.2.3}\right) + \frac{a^4}{1.2.3.4}\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x},$$

u. s. w.

sonach geht die vorige Gleichung, nach Einführung dieser Ergebnisse, in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x} =$$

$$= 2\left(1+\frac{a^2}{1^2}+\frac{a^4}{1^2.2^2}+\frac{a^6}{1^2.2^2.3^2}+\frac{a^8}{1^2.2^2.3^2.4^2}+\dots\right)\int_1^\infty e^{-ax}\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{2}{e^a}\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{1^2}-\frac{a^2}{1^2.2^2}+A_3\frac{a^3}{1^2.2^2}-A_4\frac{a^4}{1^2.2^2.3^2}+A_5\frac{a^5}{1^2.2^2.3^2} \\ -A_6\frac{a^6}{1^2.2^2.3^2.4^2}+A_7\frac{a^7}{1^2.2^2.3^2.4^2}-\dots\dots \\ -A_{2n}\frac{a^{2n}}{1^2.2^2.3^2\dots(n+1)^2}+A_{2n+1}\frac{a^{2n+1}}{1^2.2^2.3^2\dots(n+1)^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \quad (25)$$

in der man abkürzend folgende Gleichungen festgestellt hat:

$$\left.\begin{array}{l}
A_3 = 1+\frac{1.2}{3^2}, \\
A_4 = 1+\frac{1.2.3}{4^2}, \\
A_5 = 1+\frac{1.2}{4^2}+\frac{1.2.3.4}{4^2.5^2}, \\
A_6 = 1+\frac{1.2.3}{5^2}+\frac{1.2.3.4.5}{5^2.6^2}, \\
A_7 = 1+\frac{1.2}{5^2}+\frac{1.2.3.4}{5^2.6^2}+\frac{1.2.3.4.5.6}{5^2.6^2.7^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_{2n} = 1+\frac{1.2.3}{(n+2)^2}+\frac{1.2.3.4.5}{(n+2)^2(n+3)^2}+\dots\frac{1.2.3.4.5\dots(2n-1)}{(n+2)^2(n+3)^2\dots(2n)^2}, \\
A_{2n+1} = 1+\frac{1.2}{(n+2)^2}+\frac{1.2.3.4}{(n+2)^2(n+3)^2}+\dots\frac{1.2.3.4.5.6\dots\dots 2n}{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2\dots(2n+1)^2};
\end{array}\right\} (I)$$

und da, wie die letzten zwei Gleichungen zeigen, beim unendlichen Zunehmen von n für A_{2n} sowohl, als für A_{2n+1} die positive Einheit als Grenzwerth sich herausstellt, so fließt sofort die Convergenz der mit dem Factor $-\frac{2}{e^a}$ begabten unendlichen Reihe in Gleichung (25), und zwar für jeden endlichen, übrigens noch so großen Werth von a. Diese Gleichung, die nur für positive Werthe von a besteht, stellt somit den Werth des Integrals links vom Gleichheitszeichen durch convergente Reihen und durch das in Nr. 201 ausgemittelte bestimmte Integrale dar.

Da das bestimmte Integrale zur Linken der Gleichung (25) beim Umsetzen von x in x^m, für reelle Werthe von m, in folgendes übergeht:

$$m\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^m+\frac{1}{x^m}\right)}\frac{dx}{x},$$

so hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^m+\frac{1}{x^m}\right)}\frac{dx}{x}=\frac{1}{m}\int_0^\infty e^{-\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x}, \quad (3$$

wodurch wir auch, mit Zuziehung der Gleichung (25), das bestimmte Integrale links vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung jedesmal zu bestimmen in der Lage sind.

206. Von dem in der letzten Nr. ausgemittelten bestimmten Integrale können wir die Werthe noch einiger, bestimmten Integralien abhängig machen.

I. Es ist:

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,\mathrm{Cos}.ax\,dx\right\}d\alpha=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,\mathrm{Cos}.ax\,d\alpha\right\}dx,$$

oder auch:

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{Cos}.ax\,dx\right\}\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha\right\}\mathrm{Cos}.ax\,dx\ ;$$

nun hat man, nach Gleichung (62) Nr. 160,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,d\alpha=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

und nach Gleichung (71) Nr. 162,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{Cos}.ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\cdot e^{-\frac{a^2}{4\alpha^2}},$$

daher geht die vorgelegte Gleichung über in:

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2+\frac{a^2}{4\alpha^2}\right)}\frac{d\alpha}{\alpha}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{Cos}.ax}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\ ;$$

vertauscht man nun im bestimmten Integrale zur Linken α in $\frac{1}{x}$, so findet man:

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^2x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}ax}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,,$$

oder auch, mit Zuziehung der Gleichung (26) vorangehender Nr.

$$\int_0^\infty \frac{\text{Cos.}ax}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^2}{4}x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x}\,, \tag{27}$$

und da das bestimmte Integrale zur Rechten in der vorangehenden Nr. bestimmt wurde, so ist auch das Integrale zur Linken als bestimmt anzusehen.

II. Es ist ferner:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{dx}{x}=e^{-2a}\int_0^\infty e^{-\left(ax-\frac{1}{x}\right)^2}\frac{dx}{x}\,,$$

oder auch:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{dx}{x}=e^{-2a}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{-\left(ax-\frac{1}{x}\right)^2}\frac{dx}{x}$$

$$+\,e^{-2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^\infty e^{-\left(ax-\frac{1}{x}\right)^2}\frac{dx}{x}\,;$$

setzt man im ersten der rechts vom Gleichheitszeichen vorkommenden bestimmten Integralien,

$$ax-\frac{1}{x}=-z\,,$$

so erhält man für $x=0$, $z=\infty$, und für $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $z=0$, sonach auch:

$$x=\frac{-z+\sqrt{z^2+4a}}{2a}\text{ und }dx=\frac{1}{2a}\left(-1+\frac{z}{\sqrt{z^2+4a}}\right)dz\,;$$

wird ferner im zweiten dieser bestimmten Integralien

$$ax-\frac{1}{x}=z$$

gesetzt, so hat man für $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $z=0$ und für $x=\infty$, $z=\infty$, und da hier

$$x = \frac{z + \sqrt{z^2+4a}}{2a}$$

angenommen werden muß, woraus:

$$dx = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+4a}}\right) dz$$

gezogen wird, so geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \frac{dx}{x} = 2e^{-2a} \int_0^\infty e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{4a+z^2}},$$

aus der, nach geschehener Umsetzung von z in $2x\sqrt{a}$, folgende a[b]geleitet wird:

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)} \frac{dx}{x} = 2e^{-2a} \int_0^\infty e^{-4ax^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

und wenn überall a in $\frac{a}{4}$ verwandelt wird, hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^2x^2}{16}+\frac{1}{x^2}\right)} \frac{dx}{x} = 2e^{-\frac{a}{2}} \int_0^\infty e^{-ax^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

und endlich mit Zuziehung der Gleichung (26) vorhergehender Nr:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^2}{16}x+\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{x}\,; \qquad (2$$

diese Gleichung, die für alle positiven Werthe von a besteht, stellt auch das Integrale links vom Gleichheitszeichen, als abhängig von dem in der vorhergehenden Nr. ermittelten Integralausdrucke dar.

Wir brechen nunmehr ab, bestimmte Integralien, die von der in Nr. 201 eingeführten Größe c abhängen, aufzuführen und zu bestimmen. — Um auch keine der Eigenthümlichkeiten der im vorliegenden Paragraphen vorgetragenen Integrationsmethode unberührt zu lassen, legen wir uns noch, zum Beschlusse desselben, in den folgenden Nrn. ein bestimmtes Integrale vor, das durch eine ohne Ende fortlaufende, aber nur äußerst langsam convergirende Reihe gegeben werden kann; die hieraus für numerische Bestimmungen entspringende Schwierigkeit werden wir dadurch zu umgehen suchen, daß wir das vorgelegte Integrale in ein anderes, demselben ganz ähnliches umformen werden, das, nach derselben Reihe behandelt, dem vorhin erwähnten Uebelstande der langsamen Convergenz nicht mehr unterliegen, daher,

vermöge des statthabenden Zusammenhanges dieser beiden Integralien, auch das vorgelegte als leicht bestimmbar sich herausstellen soll.

207. Das bestimmte Integrale, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen, ist folgendes:

$$\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}},$$

wo h und α aller reellen und echtgebrochenen Zahlenwerthe von —1 bis +1, mitbegriffen die beiden Grenzwerthe, fähig sind.

Da jedoch durchs Umsetzen x in Sin.x das vorgelegte Integrale in folgendes:

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}}$$

übergeht, wo β den numerisch kleinsten Bogen bedeutet, dessen Sinus h ist, und dieses letztere Integrale nicht nur seiner einfachern Form wegen, sondern auch aus anderweitigen Gründen, die erst im Verfolge dieses Werkes zur Sprache kommen werden, dem vorgelegten vorzuziehen ist, so beschränken wir uns, unsere Untersuchungen über dieses letztere Integrale lediglich auszudehnen.

Löst man den Bruch:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}}$$

in eine, nach aufsteigenden Potenzen von $\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2$ fortlaufende Reihe auf, multiplicirt dann gliedweise mit dx und integrirt von $x=0$ bis $x=\beta$, so ergiebt sich:

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}} = \beta + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\alpha^{k} \int_0^\beta \operatorname{Sin}.x^{2k}\,dx,$$

wo das Summenzeichen über die ganzen Zahlenwerthe von $k=1$ bis $k=\infty$ sich erstreckt.

Das Integrale zur Rechten findet man aus Gleichung (169) Nr. 94, wenn dort x in Sin.x umgesetzt, $a=1$ und $b=-1$ angenommen wird; und wenn, wie bereits an andern Orten geschah, noch folgende Gleichung:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n.\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}$$

festgestellt wird, so erhält man folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}} =$$

$$= \beta + \sum_{k=1}^{k=\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \alpha^{2k} \left\{ \beta - \sum_{p=0}^{p=k-1} \frac{(-1)^p}{\binom{-\frac{1}{2}}{p}} \frac{\operatorname{Sin}.\beta^{2p}}{2p+1} \operatorname{Sin}.\beta \operatorname{Cos}.\beta \right\},$$

in der man:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$$

zu setzen hat; oder auch, wenn die Summenzeichen weggelassen und die Summanden gesetzt werden, folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.x^2}} =$$

$$= \beta \left\{ 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}^2 \alpha^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}^2 \alpha^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}^2 \alpha^6 + \ldots \right\}$$

$$- \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}.2\beta \left\{ \begin{array}{l} \binom{-\frac{1}{2}}{1}^2 \alpha^2 + \left[1 + \frac{2}{1}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^2}{3}\right] \binom{-\frac{1}{2}}{2}^2 \alpha^4 \\ + \left[1 + \frac{2}{1}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^2}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^4}{5}\right] \binom{-\frac{1}{2}}{3}^2 \alpha^6 \\ + \left[1 + \frac{2}{1}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^2}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^4}{5} + \frac{2.4.6}{1.3.5}\frac{\operatorname{Sin}.\beta^6}{7}\right] \binom{-\frac{1}{2}}{4}^2 \alpha^8 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \quad (29)$$

Diese Reihe, oder das bestimmte Integrale zur Linken haben wir am Schlusse der vorangehenden Nr. im Auge gehabt; in den folgenden Nrn. werden wir dieses Integrale in ein anderes umsetzen lehren, in dem α und β durch zwei andere, respektive numerisch kleinere Größen ersetzt sein sollen.

208. In der Integralrechnung II, Nr. 101, Gleichungen (I′) und (II′) sind wir auf folgende Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{Sin}.z^2}} = \frac{1}{1+\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right)^2 \operatorname{Sin}.x^2}}$$

geführt werden, falls zwischen x und z entweder die Gleichung:

$$\text{Sin.}x = \frac{(1+\alpha)\,\text{Sin.}z}{1+\alpha\,\text{Sin.}z^2}$$

oder folgende, mit derselben gleichbedeutende:

$$\text{Cos.}x = \frac{\text{Cos.}z\,\sqrt{1-\alpha^2\,\text{Sin.}z^2}}{1+\alpha\,\text{Sin.}z^2}.$$

festgestellt wird.

Mit Berücksichtigung dieses Ergebnisses und der in Nr. 144 angestellten Betrachtungen, namentlich der dort gewonnenen Gleichungen (F), sind wir zur Aufstellung folgender Gleichung:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{1-a^2\,\text{Sin.}x^2}} = \frac{1}{1+a}\int_0^B \frac{dx}{\sqrt{1-b^2\,\text{Sin.}x^2}} \qquad \text{(I)}$$

berechtiget, wenn zwischen a und b die Relation:

$$b = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \qquad \text{(II)}$$

und zwischen A und B eine der folgenden:

$$\text{Sin.}B = \frac{(1+a)\text{Sin.}A}{1+a\,\text{Sin.}A^2},\quad \text{Cos.}B = \frac{\text{Cos.}A\,\sqrt{1-a^2\,\text{Sin.}A^2}}{1+a\,\text{Sin.}A^2} \qquad \text{(III)}$$

festgestellt wird.

Sehen wir nun zu in welchem Verhalten die Größen a und b, und in welchem die Größen A und B zu einander stehen.

Setzen wir a als eine positive und von der Einheit verschiedene Größe voraus, so ersieht man aus der Gleichung (II) mit Beachtung des Umstandes, daß $(1-\sqrt{a})^2$ einen positiven Werth hat, daß die reelle und positive Größe b kleiner als die Einheit sein muß.

Wird überdieß noch $a < 1$ vorausgesetzt, so wollen wir sogleich darthun, daß man, vermöge derselben Gleichung (II), auch noch $a < b$ haben wird.

Es ist nämlich:

$$b = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{1+a} \text{ und } a = \frac{a+a^2}{1+a};$$

nun ist, wenn man $a < 1$ hat, $\sqrt{a} > a$ und um so mehr $\sqrt{a} > a^2$, daher hat man, nach den so eben aufgestellten Werthformen für a und b, die Ungleichheit $a < b$.

Die Größten A und B betreffend, bemerken wir zuerst, daß man, bei der Annahme a sei positiv und kleiner denn die Einheit, aus der zweiten der Gleichungen (III) sofort die Realität von B ersieht.

Ferner wollen wir darthun, daß, für die Annahme A sei positiv und $< \frac{\pi}{2}$, auch die Ungleichheit $A < B$ Statt haben muß.

Man hat nämlich die Gleichung:

$$\text{Sin.B} = \frac{(1+a)\,\text{Sin.A}}{1+a\,\text{Sin.A}^2} = \frac{\text{Sin.A}+a\text{Sin.A}}{1+a\,\text{Sin.A}^2},$$

und die Gleichheit:

$$\text{Sin.A} = \frac{(1+a\,\text{Sin.A}^2)\,\text{Sin.A}}{1+a\,\text{Sin.A}^2} = \frac{\text{Sin.A}+a\,\text{Sin.A}^3}{1+a\,\text{Sin.A}^2};$$

nun ist:

$$\text{Sin.A} = \text{Sin.A} \text{ und } a\,\text{Sin.A} > a\,\text{Sin.A}^3,$$

daher hat man auch:

$$\text{Sin.A} < \text{Sin.B},$$

und da die Gleichungen (III) für positive Werthe von A, auch positive Werthe der Größe B anweisen, so folgt aus der letzten Ungleichheit, daß man auch $A < B$ haben muß.

Ferner ersieht man aus denselben zwei Gleichungen (III), da dieselben für positive Werthe von A, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, der Größe Sin.B sowohl, als auch der Cos.B positive Werthe anweisen, daß die positive Größe B ebenfalls kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein wird.

Endlich geben diese Gleichungen (III) für die Annahme $A = \frac{\pi}{2}$, auch $B = \frac{\pi}{2}$.

An die Stelle der obigen Gleichungen (II) und (III), die b und B durch a und A ausgedrückt angeben, wollen wir, wie es unser Zweck erfordert, umgekehrt: die Gleichungen herstellen, welche die Größen a und A durch b und B ausdrücken. Um jedoch bei diesem Geschäfte solche Auflösungen, die mit den eben gewonnenen Ergebnissen nicht vereinbar wären, zu vermeiden, schlagen wir folgenden Weg ein.

Aus der Gleichung (II) findet man:

$$1+b = \frac{(1+\sqrt{a})^2}{1+a} \text{ und } 1-b = \frac{(1-\sqrt{a})^2}{1+a},$$

also

$$\frac{1-b}{1+b} = \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2;$$

und da nach dem Vorangeschickten $b < 1$ ist, so führt die letzte Gleichung auf folgende:

$$\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}},$$

und hieraus:

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b} + \sqrt{1-b}},$$

oder endlich:

$$a = \frac{1 - \sqrt{1-b^2}}{1 + \sqrt{1-b^2}}; \qquad \text{(II')}$$

und wenn, zur leichtern numerischen Bestimmung von a,

$$b = \text{Sin.}u \qquad (\alpha)$$

angenommen wird, so findet man:

$$\sqrt{a} = \text{Tang.}\tfrac{u}{2}, \qquad (\beta)$$

oder auch

$$b\sqrt{a} = 2\,(\text{Sin.}\tfrac{u}{2})^2 . \qquad (\beta')$$

Bestimmt man also aus der Gleichung (II'), bei irgend einer Annahme von b, den Werth von a, so ergiebt sich $a < b$; oder bestimmt man aus Gleichung (α) den Werth von u, so bietet eine der Gleichungen (β) und (β') für a einen Werth dar, der kleiner als b ist.

Um A durch B ausgedrückt zu erhalten, multipliciren wir die Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen der ersten unter den Gleichungen (III) mit den analogen Theilen der Gleichung (II); als Ergebniß dieser Verrichtung erhält man die Gleichung:

$$b\,\text{Sin.B} = \frac{2\sqrt{a}\,.\,\text{Sin.A}}{1+a\,\text{Sin.A}^2};$$

vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (II), die den Zusammenhang zwischen b und a anzeigt, so gelangt man zur Ueberzeugung, daß die Größen $b\,\text{Sin.B}$ und $a\,\text{Sin.A}^2$ in gleicher Beziehung zu einander stehen, als die Größen b und a, daher hat man auch:

$$a\,\text{Sin.A}^2 = \frac{1 - \sqrt{1-b^2\,\text{Sin.B}^2}}{1 + \sqrt{1-b^2\,\text{Sin.B}^2}}, \qquad (\text{II}_1)$$

oder wenn man:

$$b\,\text{Sin.B} = \text{Sin.}u_1 \qquad (\alpha_1)$$

setzt, so findet man auch entweder:

$$\sqrt{a}\,\text{Sin.A} = \text{Tang.}\frac{u_1}{2}, \qquad (\beta_1)$$

oder:

$$b\sqrt{a}\,\text{Sin.A Sin.B} = 2\left(\text{Sin.}\frac{u_1}{2}\right)^2. \qquad (\beta'_1)$$

Wenn nach Gleichung (II_1), bei irgend einer Annahme über B, der Werth von A gesucht wird, so findet man nach dem Vorangeschickten $A < B$; oder sucht man aus der Gleichung (α_1) den Werth von u_1, so bietet eine der Gleichungen (β_1) oder (β'_1) den Werth von A ebenfalls kleiner als den von B dar.

Für den Fall $B = \frac{\pi}{2}$ bietet die Gleichung (II_1) folgendes Resultat:

$$a \operatorname{Sin}.A^2 = \frac{1 - \sqrt{1-b^2}}{1 + \sqrt{1-b^2}}$$

dar; allein bedenkt man die obige Gleichung (II'), so ergiebt sich

$$\operatorname{Sin}.A^2 = 1, \text{ oder } A = \frac{\pi}{2},$$

welches mit dem obigen Ergebnisse in Uebereinstimmung ist.

209. Wir wenden uns unserem Hauptgegenstande wieder zu, und wollen nun zeigen, wie das in der vorangehenden Nr. Mitgetheilte zu benützen sei, um das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin}.x^2}}$$

durch eine etwas schneller convergirende Reihe zu ermitteln, als unmittelbar durch die Gleichung (29) Nr. 207.

Man bilde sich die Reihe von Größen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \ldots \alpha_n$$

dergestalt, daß jede folgende aus der unmittelbar vorangehenden auf ein und dieselbe, und zwar auf folgende Weise entspringe.

Wenn α_{k-1} und α_k zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder dieser Größenreihe vorstellen, so sei:

$$\alpha_k = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2}}{1 + \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2}}; \qquad (A)$$

setzt man in diese Recursionsgleichung, statt k, nach und nach die ganzen Zahlenwerthe 2, 3, 4, ... n, so wird man $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ dermaßen bestimmt erhalten, daß, bei der Annahme $\alpha_1 < 1$, folgende Ungleichheiten sich ergeben werden:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 \ldots > \alpha_n;$$

oder, noch passender für die numerische Bestimmung, man setze:

$$\alpha_1 = \operatorname{Sin}.\psi_1, \qquad (b_1)$$

und bestimme α_2 aus einer der folgenden zwei Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha_2} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\psi_1 \ , \quad \alpha_1\sqrt{\alpha_2} = 2(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\psi_1)^2 \ ; \qquad (c_1)$$

hierauf setze man:

$$\alpha_2 = \text{Sin.}\psi_2 \ , \qquad (b_2)$$

und bestimme α_3 nach einer der zwei folgenden Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha_3} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\psi_2 \ , \quad \alpha_2\sqrt{\alpha_3} = 2(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\psi_2)^2 \ ; \qquad (c_2)$$

man fahre in dieser Weise fort, und setze endlich:

$$\alpha_{n-1} = \text{Sin.}\psi_{n-1} \ , \qquad (B)$$

so wird man α_n aus einer der zwei folgenden Gleichungen zu bestimmen haben:

$$\sqrt{\alpha_n} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\psi_{n-1} \ , \quad \alpha_{n-1}\sqrt{\alpha_n} = 2(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\psi_{n-1})^2 \ . \qquad (C)$$

Ist nun $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, alsdann hat man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2\,\text{Sin.}x^2}} =$$

$$= (1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\ldots(1+\alpha_n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2\,\text{Sin.}x^2}} \ ; \qquad (D)$$

für den vorliegenden Fall giebt aber die Gleichung (29) Nr. 207:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2\,\text{Sin.}x^2}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}^2\alpha_n^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}^2\alpha_n^4 + \ldots\right\} \ ; \qquad (30)$$

und da man α_n beliebig klein machen kann, so leuchtet sofort die schnelle Convergenz der Reihe rechter Hand vom Gleichheitszeichen ein.

Die Größe α_n in dieser Gleichung kann sogar dermaßen klein gemacht werden, daß man für einen gewissen zu erzweckenden Genauigkeitsgrad einfach die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2\,\text{Sin.}x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

annehmen darf, wodurch das ganze Geschäft der Integration auf die bloße Bestimmung der Größen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{n-1}$ sich reducirt.

Hat man aber $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$, dann bestimme man noch folgende Reihe von Größen:

$$\alpha_1\,\text{Sin.}\beta_1 \ , \ \alpha_2\,\text{Sin.}\beta_2 \ , \ \alpha_3\,\text{Sin.}\beta_3 \ , \ \ldots \ \alpha_n\,\text{Sin.}\beta_n \ ,$$

mittelst der Recursionsgleichung:

$$\alpha_k \operatorname{Sin}.\beta_k^2 = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2 \operatorname{Sin}.\beta_{k-1}^2}}{1 + \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2 \operatorname{Sin}.\beta_{k-1}^2}}, \qquad (A')$$

d. h. man setze in diese Gleichung für k nach und nach die Zahlenwerthe 2, 3, 4, ... n, so wird man, unter der Annahme $\alpha_1 < 1$ und nach vollbrachter Bestimmung der Größen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, die Größen $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \beta_n$ dergestalt bestimmt erhalten, daß folgende Ungleichheiten bestehen werden:

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 \ldots > \beta_n ;$$

oder, tauglicher für die numerische Bestimmung, man setze:

$$\alpha_1 \operatorname{Sin}.\beta_1 = \operatorname{Sin}.\varphi_1 , \qquad (b'_1)$$

und bestimme aus einer der zwei folgenden Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha_2} \operatorname{Sin}.\beta_2 = \operatorname{Tang}.\tfrac{1}{2}\varphi_1, \quad \alpha_1 \sqrt{\alpha_2} \operatorname{Sin}.\beta_1 \operatorname{Sin}.\beta_2 = 2(\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\varphi_1)^2 \quad (c_1)$$

den Werth von β_2; hierauf setze man:

$$\alpha_2 \operatorname{Sin}.\beta_2 = \operatorname{Sin}.\varphi_2 , \qquad (b'_2)$$

und bestimme aus einer der zwei folgenden Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha_3} \operatorname{Sin}.\beta_3 = \operatorname{Tang}.\tfrac{1}{2}\varphi_2 , \quad \alpha_2 \sqrt{\alpha_3} \operatorname{Sin}.\beta_2 \operatorname{Sin}.\beta_3 = 2(\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\varphi_2)^2 \quad (c'_2$$

den Werth von β_3 u. s. f.; endlich setze man:

$$\alpha_{n-1} \operatorname{Sin}.\beta_{n-1} = \operatorname{Sin}.\varphi_{n-1} , \qquad (B')$$

und nehme eine der zwei folgenden Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha_n} \operatorname{Sin}.\beta_n = \operatorname{Tang}.\tfrac{1}{2}\varphi_{n-1} , \ \alpha_{n-1} \sqrt{\alpha_n} \operatorname{Sin}.\beta_{n-1} \operatorname{Sin}.\beta_n = 2(\operatorname{Sin}.\tfrac{1}{2}\varphi_{n-1})^2 \ (C')$$

zu Hülfe, um den Werth von β_n zu erhalten.

Denken wir uns diese Größen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ bestimmt, so hat man:

$$\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin}.x^2}} =$$

$$= (1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4) \ldots (1+\alpha_n) \int_0^{\beta_n} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2 \operatorname{Sin}.x^2}} , \qquad (D')$$

und es erübriget nur noch die Berechnung des bestimmten Integrals zur Rechten vom Gleichheitszeichen, die, da man $\beta_n < \beta_1$ und $\alpha_n < \alpha_1$ hat, nach Gleichung (29) Nr. 207 jedesmal leicht bewerkstelliget werden kann.

Den Fall, wo α_n dermaßen klein ist, daß man:

$$\int_0^{\beta_n} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2 \operatorname{Sin}.x^2}} = \int_0^{\beta_n} dx = \beta_n$$

setzen darf, wo demnach die so eben citirte Gleichung (29) ganz übergangen werden kann, werden wir, nachdem in der folgenden Nr. ein numerisches Beispiel nach dem bis jetzt Mitgetheilten behandelt sein wird, einer besonderen Untersuchung unterziehen.

210. Es sei das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{Sin}.x^2}}$$

zur numerischen Bestimmung vorgelegt. Wenn die numerische Ermittelung dieses Integrals nur mit einer, bis auf die siebente Decimale sich erstreckenden Genauigkeit nach der Gleichung (29) Nr. 207 zu vollziehen wäre, so dürfte erst bei jenen Gliedern dieser Gleichung die Rechnung abgebrochen werden, die höhere Potenzen als α^{18} enthalten; nimmt man hingegen nur eine einzige Transformation, wie in der vorangehenden Nr. gezeigt wurde, vor, so kann man die Rechnung bis und mit dem Gliede α^4 schließen.

In der That, setzt man:

$$\alpha_1^2 = \tfrac{1}{4}, \text{ also } \alpha_1 = \tfrac{1}{2} \text{ und } \beta_1 = \tfrac{\pi}{2},$$

so giebt die Gleichung (A) der vorangehenden Nr., wenn daselbst $k = 2$ angenommen wird,

$$\alpha_2 = 7-4\sqrt{3} = 0{,}0717968\ ,$$

und die Gleichung (A') derselben Nr. giebt:

$$\operatorname{Sin}.\beta_2 = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{3}}\ ,$$

also:

$$\beta_2 = 42^0\,58'\,51{,}4'' = 0{,}23878302\pi\ ;$$

die Gleichung (D') am gleichen Orte geht alsdann, bei der Annahme $n = 2$, über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{Sin}.x^2}} = (1+\alpha_2)\int_0^{\beta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_2^2 \operatorname{Sin}.x^2}}\ ,$$

wo α_2 und β_2 die eben bestimmten Werthe haben.

Wird nun das bestimmte Integrale zur Rechten nach Gleichung (29) Nr. 207 gerechnet, und zwar bis und mit dem Gliede α_2^4, so ergiebt sich, mit Zuziehung einer siebenstelligen Logarithmentafel,

$$\int_0^{\beta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_2^2 \operatorname{Sin.}x^2}} = 1{,}00129244 \, . \, 0{,}23878302\pi$$
$$- \, 0{,}000646795 \operatorname{Sin.} 85^0\,57'\,42{,}8'' \ ,$$

oder endlich:

$$\int_0^{\beta_2} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_2^2 \operatorname{Sin}x^2}} = 0{,}7504835 \ ,$$

daher hat man, vermöge der obigen Gleichung,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{Sin.}x^2}} = 1{,}0717968 \, . \, 0{,}7504835 \ ,$$

oder:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{Sin.}x^2}} = 0{,}8043657 \ .$$

Legendre, der den Werth dieses Integrals auf 10 Decimalstellen bestimmt hat, giebt den Werth desselben durch folgenden Decimalbruch an:

$$0{,}8043661012 \ ;$$

der von uns angegebene Werth weicht sonach von diesem nur um vier Einheiten in der siebenten Decimalstelle ab, welcher Unterschied jedoch lediglich in der siebenstelligen Logarithmentafel seinen Grund hat. Nähme man mit dem bestimmten Integrale, das von $x=0$ bis $x=\beta_2$ sich erstreckt, eine ähnliche Umformung, wie mit dem vorgelegten vor, alsdann dürfte man in der Gleichung (29) die Rechnung bis und mit dem Gliede α^2 abbrechen, um noch immer ein, bis auf die siebente Decimale genaues Resultat zu gewärtigen.

Wir übergehen jedoch diese zweite Transformation, da wir in der nächsten Nr. zeigen werden, wie man einfach mit Hülfe der in der vorangehenden Nr. mitgetheilten successiven Transformation, ohne Zuziehung der oft citirten Gleichung (29) das bestimmte Integrale:

$$\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin.} x^2}},$$

wo $\beta_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ und $\alpha < 1$ ist, mit jeder verlangten Genauigkeit bestimmen kann.

211. Mit Zuziehung der Recursionsgleichungen (A) und (A') Nr. 209 wollen wir zuerst Grenzwerthe für die Größen α_k und β_k, unter der Annahme des beständigen Zunehmens von k, suchen.

Daß die Größen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_k,$$

mit dem Zunehmen der Stellenzeiger kleiner und kleiner werden, ist bereits oben Nr. 208 festgestellt worden; allein daß man auch

$$\operatorname{Lim}: \alpha_k = o$$

habe, wo das Grenzzeichen auf das unendliche Wachsen von k Bezug hat, wird aus dem Folgenden hervorgehen.

Nach der oben citirten Gleichung (A) hat man:

$$\alpha_k = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2}}{1 + \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2}},$$

aus der man auch folgende ziehen kann:

$$\alpha_k = \frac{\alpha_{k-1}^2}{\{1 + \sqrt{1-\alpha_{k-1}^2}\}^2},$$

die folgende zwei Ungleichheiten hervorruft:

$$\alpha_k < \alpha_{k-1}^2, \quad \text{und} \quad \alpha_k > \tfrac{1}{4}\alpha_{k-1}^2;$$

setzt man in diese Ungleichheiten statt k nach und nach die Zahlenwerthe 2, 3, 4, ..., so gelangt man am Ende auf folgende Ungleichheiten:

$$\alpha_k < \alpha_1^{2k}, \quad \alpha_k > \frac{1}{4^{2k-1}} \alpha_1^{2k}; \tag{I}$$

berücksichtiget man nun, daß $\alpha_1 < 1$ sei, so fließt sofort die Richtigkeit der obigen, α_k betreffenden Grenzgleichung.

Die Größen:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_k$$

betreffend, wissen wir zwar, daß dieselben, falls $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$ ist, mit dem Zunehmen des Stellenzeigers k beständig abnehmen; allein es

trifft hier der für den vorliegenden Zweck höchst günstige Umstand ein, daß dieselben nicht ohne Ende abnehmen, sondern für jeden endlichen Werth von β_1 gegen einen endlichen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Grenzwerth convergiren, oder es besteht die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \beta_k = \Theta$$

wo Θ diesen zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Grenzwerth vorstellt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung thun wir auf folgendem Weg dar.

Aus der Gleichung (A′) Nr. 209 kann man folgende ableiten:

$$\alpha_k \, \text{Sin.}\beta_k^2 = \frac{\alpha_{k-1}^2 \, \text{Sin.}\beta_{k-1}^2}{\{1 + \sqrt{1 - \alpha_{k-1}^2 \, \text{Sin.}\beta_{k-1}^2}\}^2};$$

aus der Gleichung (A) derselben citirten Nr., oder unmittelbar aus der Gleichung (II) Nr. 208 findet man:

$$\alpha_{k-1} = \frac{2\sqrt{\alpha_k}}{1+\alpha_k} \text{ oder } \alpha_{k-1}^2 = \frac{4\alpha_k}{(1+\alpha_k)^2},$$

daher geht die vorige Gleichung, nach geschehener Substitution und Ausziehung der zweiten Wurzel, in folgende über:

$$\text{Sin.}\beta_k = \frac{2\,\text{Sin.}\beta_{k-1}}{1+\alpha_k} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \alpha_{k-1}^2 \, \text{Sin.}\beta_{k-1}^2}};$$

aus der sofort folgende Ungleichheit:

$$\text{Sin.}\beta_k > \frac{2\,\text{Sin.}\beta_{k-1}}{1+\alpha_k} \cdot \frac{1}{2} \text{ oder } \text{Sin.}\beta_k > \frac{\text{Sin.}\beta_{k-1}}{1+\alpha_k}$$

gewonnen wird; setzt man in dieselbe statt k nach und nach die Zahlenwerthe 2, 3, 4, ..., so gelangt man, nach gehöriger Verbindung der so gewonnenen Ungleichheiten, auf folgende:

$$\text{Sin.}\beta_k > \frac{\text{Sin.}\beta_1}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\dots(1+\alpha_k)}. \qquad (\text{II})$$

Von dieser Ungleichheit gehen wir nun aus, die Richtigkeit unserer vorigen Behauptung, betreffend den Grenzwerth von β_k, falls k ohne Ende zunimmt, darzuthun.

Fassen wir zunächst die Factorenfolge im Nenner des Bruches rechts vom Ungleichheitszeichen ins Auge, und bezeichnen dieselbe abkürzend durch Π_k, wodurch die obige Ungleichheit folgendermaßen gestellt werden kann:

$$\mathrm{Sin}.\beta_k > \frac{\mathrm{Sin}.\beta_1}{\Pi_k}, \tag{II'}$$

so werden wir zuerst darthun, daß der Werth der Größe Π_k, die durch folgende Gleichung:

$$\Pi_k = (1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\ldots(1+\alpha_k)$$

gegeben ist, beim unendlichen Zunehmen von k gegen eine endliche Größe convergire.

Zu diesem Zwecke nehme man von beiden Theilen dieser Gleichung die natürlichen Logarithmen, so ergiebt sich:

$$\log.\Pi_k = \log.(1+\alpha_2) + \log.(1+\alpha_3) + \log.(1+\alpha_4) + \ldots + \log.(1+\alpha_k);$$

und da die Größen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_k$ sämmtlich kleiner als die Einheit sind, so hat man auch:

$$\log.\Pi_k = A_1 - \tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{1}{3}A_3 - \tfrac{1}{4}A_4 + \ldots, \tag{a}$$

wo abkürzend

$$A_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_k,$$
$$A_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \ldots + \alpha_k^2,$$
$$A_3 = \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 + \alpha_5^3 + \ldots + \alpha_k^3,$$
$$A_4 = \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \alpha_4^4 + \alpha_5^4 + \ldots + \alpha_k^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gesetzt wurde; und nunmehr wollen wir darthun, daß die ohne Ende fortlaufende Reihe zur Rechten vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (a) gegen einen von Null verschiedenen und endlichen Werth convergire, woraus dann $\log.\Pi_k$, somit auch Π_k als endliche Größe sich herausstellen wird.

Da die Größen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_k$ eine der Größe nach fallende Gliederreihe bilden, und da ferner jede dieser Größen positiv und kleiner als die Einheit ist, so folgern wir sofort, daß die Größen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ sämmlich positiv sind und ebenfalls eine abnehmende Gliederreihe bilden, nämlich, man hat:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4, \ldots$$

Dieses zugegeben erhält man, mit Beachtung, daß $\Pi_k > 1$, also $\log.\Pi_k$ eine positive Größe ist, aus der Gleichung (a) folgende zwei Ungleichheiten:

$$\log.\Pi_k < A_1 \quad \text{und} \quad \log.\Pi_k > A_1 - \tfrac{1}{2}A_2,$$

oder auch, was namentlich die zweite dieser Ungleichheiten betrifft, wenn man die Ungleichheit $A_1 > A_2$ bedenkt, um so mehr:

$$\log . \Pi_k < A_1 \quad \text{und} \quad \log . \Pi_k > \tfrac{1}{4} A_2 \, ;$$

setzt man aber in die erste der Ungleichheiten in (I) statt k nach und nach die ganzen Zahlenwerthe 2, 3, 4, . . . k, so findet man, nach vollzogener Summation derselben, mit Beachtung, daß k eine unendlich großwerdende Zahl vorstellt, die Ungleichheit:

$$A_1 < \frac{\alpha_1^4}{1-\alpha_1^2} ,$$

daher geht die erste der zwei vorangehenden Ungleichheiten auch in folgende:

$$\log . \Pi_k < \frac{\alpha_1^4}{1-\alpha_1^2}$$

über; ferner kann man aus der zweiten der Ungleichheiten in (I) auch folgende:

$$\alpha_k^2 > \frac{1}{4^{4k-2}} \, \alpha_1^{4k}$$

folgern, und wenn mit dieser, wie oben angezeigt wurde, verfahren wird, erhält man:

$$\tfrac{1}{4} A_2 > \frac{1}{2^5} \cdot \frac{\alpha_1^8}{4^4-\alpha_1^4} ,$$

daher hat man auch:

$$\log . \Pi_k > \frac{1}{2^5} \cdot \frac{\alpha_1^8}{4^4-\alpha_1^4} \, ;$$

die Größe α_1, die allerdings kleiner als die Einheit vorausgesetzt wurde, ist aber auch größer als Null oder dieselbe ist als eine endliche Größe festgestellt worden: somit zeigen die beiden zuletzt gefundenen Grenzwerthe für $\log . \Pi_k$, die beide endlich sind, daß auch Π_k einen endlichen Werth hat, w. z. z. w.

Nachdem nun erwiesen wurde, daß Π_k einen endlichen Werth hat, so folgt sofort aus der Ungleichheit (II′), da auch β_1 einen endlichen Werth hat, daß der Grenzwerth von $\mathrm{Sin}.\beta_k$, somit auch der von β_k, beim unendlichen Wachsen von k, unter eine endliche Größe nicht herunter gebracht werden kann, oder es nähert sich in der Reihe der abnehmenden Größen:

$$\beta_1 , \beta_2 , \beta_3 , \beta_4 , \ldots \beta_k ,$$

das dem größten Stellenzeiger entsprechende Glied einer endlichen Größe, die wir oben durch Θ_k dargestellt haben, w. z. b. w.

Alles dieses vorausgesetzt, sind wir nunmehr in der Lage den Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin.} x^2}},$$

ohne Zuziehung der Gleichung (29) Nr. 207, mit jeder verlangten Schärfe, auf folgendem Wege zu bestimmen.

Man bestimme mittelst der Recursionsgleichung (A) oder mittelst der Gleichungen (b_1), (c_1), (b_2), (c_2), . . . (B), (C) Nr. 209 die Größen:

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n,$$

unter denen die letzte α_n jenen Grad von Kleinheit hat, daß, wenn auch α_{n+1} gleich Null angenommen wird, der hierdurch begangene Fehler auf den beabsichtigten Genauigkeitsgrad, mit dem das bestimmte Integrale ermittelt werden soll, keinen weitern Einfluß ausübe; ferner bestimme man die Größen $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$ entweder mittelst der Recursionsgleichung (A′), oder mit Hülfe der Gleichungen (b'_1), (c'_1), (b'_2), (c'_2), . . . (B′), (C′) derselben citirten Nr., und breche die Rechnung mit dem Gliede β_n ab, so erhält man, vermöge der Gleichung (D′) derselben Nr., mit Beachtung, daß man:

$$\int_0^{\beta_n} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_n^2 \operatorname{Sin.} x^2}} = \int_0^{\beta_n} dx = \beta_n$$

setzen darf, die Endgleichung:

$$\int_0^{\beta_1} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin.} x^2}} = (1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4) \ldots (1+\alpha_n)\beta_n, \qquad (31)$$

und wenn $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, dann hat man auch $\beta_n = \frac{\pi}{2}$, und es ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{Sin.} x^2}} = (1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4) \ldots (1+\alpha_n)\frac{\pi}{2}; \qquad (32)$$

je kleiner α_n ist, mit desto mehr Genauigkeit stellen diese Gleichungen die Integralien zur Linken der Gleichheitszeichen dar.

212. Zum Beschlusse dieses Gegenstandes wollen wir noch folgendes Integrale:

$$\int_0^{\frac{22}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2 \text{Sin.}x^2}},$$

nach der vorhergehenden Nr. bestimmen.

Die hier gebrauchten Gleichungen entlehnen wir sämmtlich aus Nr. 209.

Da hier $\alpha_1 = \frac{9}{10}$ ist, so giebt die Gleichung (b_1):

$$\psi_1 = 64^0\, 9'\, 29''\,,$$

und die erste der Gleichungen (c_1):

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\alpha_2 = 0{,}7971212 - 1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0{,}3928642\;;$$

die Gleichung (b_2) giebt:

$$\psi_2 = 23^0\, 7'\, 58{,}2''\,,$$

und die erste der Gleichungen (c_2):

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\alpha_3 = 0{,}3110325 - 1 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 0{,}0418856\;;$$

setzt man ferner in die Gleichung (B) $n = 4$, so hat man:

$$\psi_3 = 2^0\, 24'\, 2{,}06''\,,$$

daher giebt die erste der Gleichungen (C), wenn in derselben $n = 4$ angenommen wird,

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log.}\alpha_4 = 0{,}3212257 - 2 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = 0{,}0004390\;;$$

wird in den Gleichungen (B) und (C) $n = 5$ angenommen, so ergiebt sich für α_5 eine kleine Zahl der Art, daß, wenn das zu ermittelnde bestimmte Integrale nur bis und mit der siebenten Decimalstelle angegeben werden soll, dieselbe ganz unbeachtet gelassen oder gleich Null gesetzt werden darf: es erübriget uns daher nur noch die Bestimmung der Größen β_2, β_3, β_4.

Da hier $\beta_1 = \frac{99}{100}$ ist, oder da β_1 die Länge eines mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreisbogens vorstellt, dessen entsprechender Mittelpunktswinkel gleich $56^0\, 45'\, 16{,}75''$ ist, so kann man auch:

$$\beta_1 = 56^0\, 45'\, 16{,}75''$$

setzen, und die Gleichung (b'_1) giebt:

$$\varphi_1 = 48^0\, 48'\, 43{,}6''\,,$$

folglich die erste der Gleichungen (c'_1):

$$\text{Log. Sin.}\beta_2 = 9{,}8596931 \quad \text{und} \quad \beta_2 = 46^0\, 22'\, 45{,}9''\;;$$

die Gleichung (b'_2) giebt:

$$\varphi_2 = 16^0\, 31'\, 23{,}6''\,,$$

daher bietet die erste der Gleichungen (c'_2) folgende Bestimmungen dar:

$$\text{Log. Sin.}\beta_3 = 9{,}8509311 \quad \text{und} \quad \beta_3 = 45^0\,11'\,30{,}5''\ ;$$

wenn in der Gleichung (B′) $n = 4$ angenommen wird, hat man:

$$q_3 = 1^0\,42'\,10{,}39''\ ,$$

und wenn die gleiche Annahme über n in der ersten der Gleichungen (C′) getroffen wird, hat man:

$$\text{Log. Sin.}\beta_4 = 9{,}8508392 \quad \text{und} \quad \beta_4 = 45^0\,10'\,45{,}2''\ ,$$

oder wenn man β_4 durch den diesem Winkel entsprechenden Bogen ausdrückt, hat man auch:

$$\beta_4 = 0{,}2509957\,\pi\ ;$$

und die Gleichung (31) der vorangehenden Nr. auf den vorliegenden Fall angewandt, giebt:

$$\int_0^{\frac{99}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2\,\text{Sin.}x^2}} =$$

$$= 1{,}3928642\ .\ 1{,}0418856\ .\ 1{,}0004390\ .\ 0{,}2509957\ .\ \pi\ ,$$

oder mit Zuziehung einer siebenstelligen Logarithmentafel:

$$\int_0^{\frac{99}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2\,\text{Sin.}x^2}} = 1{,}1449303\ .$$

---

§. II.

Integration durch ohne Ende fortlaufende Factorenfolgen.

213. Wir haben bereits in den letzten zwei Nrn. des vorangehenden Paragraphen, wie aus den Gleichungen (31) und (32) daselbst entnommen werden kann, eine Integration durch eine unendliche Factorenfolge ausgeführt; einzig aus dem Grunde, den Zusammenhang des in den letzten sechs Nrn. behandelten Gegenstandes nicht zu unterbrechen, haben wir es vorgezogen diese zwei citirten Gleichungen noch dem vorangehenden Paragraphen beizugeben.

Die Zahl der Fälle, in denen durch unendliche Factorenfolgen Integrationen vollzogen werden, ist, verglichen mit der durch unendliche Reihen, äußerst gering; auch giebt es noch kein allgemeines Verfahren solche Factorenfolgen jedesmal herzustellen: wir unterlassen daher, zumal wir uns nur mit einem einzigen, zwar Mancherlei umfassenden

$$\int_0^{\frac{99}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2 \operatorname{Sin}.x^2}},$$

nach der vorhergehenden Nr. bestimmen.

Die hier gebrauchten Gleichungen entlehnen wir sämmtlich aus Nr. 209.

Da hier $\alpha_1 = \frac{9}{10}$ ist, so giebt die Gleichung (b_1):

$$\psi_1 = 64^0\, 9'\, 29'',$$

und die erste der Gleichungen (c_1):

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}.\alpha_2 = 0{,}7971212 - 1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0{,}3928642\ ;$$

die Gleichung (b_2) giebt:

$$\psi_2 = 23^0\, 7'\, 58{,}2'',$$

und die erste der Gleichungen (c_2):

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}.\alpha_3 = 0{,}3110325 - 1 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 0{,}0118856\ ;$$

setzt man ferner in die Gleichung (B) $n = 4$, so hat man:

$$\psi_3 = 2^0\, 24'\, 2{,}06'',$$

daher giebt die erste der Gleichungen (C), wenn in derselben $n = 4$ angenommen wird,

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}.\alpha_4 = 0{,}3212257 - 2 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = 0{,}0004390\ ;$$

wird in den Gleichungen (B) und (C) $n = 5$ angenommen, so ergiebt sich für α_5 eine kleine Zahl der Art, daß, wenn das zu ermittelnde bestimmte Integrale nur bis und mit der siebenten Decimalstelle angegeben werden soll, dieselbe ganz unbeachtet gelassen oder gleich Null gesetzt werden darf: es erübriget uns daher nur noch die Bestimmung der Größen β_2, β_3, β_4.

Da hier $\beta_1 = \frac{99}{100}$ ist, oder da β_1 die Länge eines mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreisbogens vorstellt, dessen entsprechender Mittelpunktswinkel gleich $56^0\, 45'\, 16{,}75''$ ist, so kann man auch:

$$\beta_1 = 56^0\, 45'\, 16{,}75''$$

setzen, und die Gleichung (b'_1) giebt:

$$\varphi_1 = 48^0\, 48'\, 43{,}6'',$$

folglich die erste der Gleichungen (c'_1):

$$\operatorname{Log}.\operatorname{Sin}.\beta_2 = 9{,}8596931 \quad \text{und} \quad \beta_2 = 46^0\, 22'\, 45{,}9''\ ;$$

die Gleichung (b'_2) giebt:

$$\varphi_2 = 16^0\, 31'\, 23{,}6'',$$

daher bietet die erste der Gleichungen (c'_2) folgende Bestimmungen dar:

$$\text{Log. Sin.}\beta_3 = 9{,}8509311 \quad \text{und} \quad \beta_3 = 45^0\, 11'\, 30{,}5'' \;;$$

wenn in der Gleichung (B') $n = 4$ angenommen wird, hat man:

$$\varphi_3 = 1^0\, 42'\, 10{,}39'' \;,$$

und wenn die gleiche Annahme über n in der ersten der Gleichungen (C') getroffen wird, hat man:

$$\text{Log. Sin.}\beta_4 = 9{,}8508392 \quad \text{und} \quad \beta_4 = 45^0\, 10'\, 45{,}2'' \;,$$

oder wenn man β_4 durch den diesem Winkel entsprechenden Bogen ausdrückt, hat man auch:

$$\beta_4 = 0{,}2509957\, \pi \;;$$

und die Gleichung (31) der vorangehenden Nr. auf den vorliegenden Fall angewandt, giebt:

$$\int_0^{\frac{99}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2\, \text{Sin.}x^2}} =$$

$$= 1{,}3928642 \,.\, 1{,}0418856 \,.\, 1{,}0004390 \,.\, 0{,}2509957 \,.\, \pi \;,$$

oder mit Zuziehung einer siebenstelligen Logarithmentafel:

$$\int_0^{\frac{99}{100}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{9}{10})^2\, \text{Sin.}x^2}} = 1{,}1449303 \;.$$

---

§. II.

Integration durch ohne Ende fortlaufende Factorenfolgen.

213. Wir haben bereits in den letzten zwei Nrn. des vorangehenden Paragraphen, wie aus den Gleichungen (31) und (32) daselbst entnommen werden kann, eine Integration durch eine unendliche Factorenfolge ausgeführt; einzig aus dem Grunde, den Zusammenhang des in den letzten sechs Nrn. behandelten Gegenstandes nicht zu unterbrechen, haben wir es vorgezogen diese zwei citirten Gleichungen noch dem vorangehenden Paragraphen beizugeben.

Die Zahl der Fälle, in denen durch unendliche Factorenfolgen Integrationen vollzogen werden, ist, verglichen mit der durch unendliche Reihen, äußerst gering; auch giebt es noch kein allgemeines Verfahren solche Factorenfolgen jedesmal herzustellen: wir unterlassen daher, zumal wir uns nur mit einem einzigen, zwar Mancherlei umfassenden

Fall beschäftigen werden, allgemeine Kennzeichen über Convergenz und Divergenz von ohne Ende fortlaufenden Factorenfolgen aufzustellen, und werden uns im Verfolge lediglich mit der Begründung der Convergenz der gewonnenen Factorenfolgen befassen.

214. Es sei das bestimmte Integrale:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^k\,dx\,,$$

wo a eine positive, reelle, und k eine positive und ganze Zahl vorstellt, durch eine Factorenfolge auszudrücken.

Nach Gleichung (63), Integralrechnung II, Nr. 56 hat man:

$$\int x^{a-1}(1-x)^k\,dx = \frac{x^a(1-x)^k}{a+k} + \frac{k}{a+k}\int x^{a-1}(1-x)^{k-1}\,dx\,,$$

und da a sowohl als k positive Werthe haben, so folgert man aus dieser Gleichung die folgende:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^k\,dx = \frac{k}{a+k}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{k-1}\,dx\,;$$

läßt man hier die ganze und positive Zahl k nach und nach in k—1, k—2, k—3, . . . 2, 1 übergehen, und nimmt dann das Product sämmtlicher gewonnenen Gleichungen, so erhält man:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^k\,dx = \frac{k(k-1)(k-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,2.\,1}{(a+k)(a+k-1)(a+k-2)\,.\,.\,(a+2)(a+1)}\int_0^1 x^{a-1}dx\,,$$

aus der die folgende gezogen wird:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^k\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,k}{(a+1)(a+2)(a+3)\,.\,.\,.\,(a+k)}\,.$$

Von dieser Gleichung gehen wir nun aus, den Werth eines bestimmten Integrals durch eine ohne Ende fortlaufende Factorenfolge auszudrücken.

Geht in dieser Gleichung x in $\frac{x}{k}$ über, so hat man:

$$\int_0^k x^{a-1}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,k\,.\,k^a}{(a+1)(a+2)(a+3)\,.\,.\,.\,(a+k)}\,;$$

wird nun die ganze und positive Zahl k in den Zustand des unendlichen Zunehmens versetzt, und wird hierbei die Grenzgleichung:

$$\text{Lim}: \left(1-\frac{x}{k}\right)^k = e^{-x}$$

berücksichtiget, wo das Grenzzeichen auf das unendliche Zunehmen von k bezogen ist, so kann man die letzte Gleichung folgendermaßen stellen:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \frac{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;k}{a(a+1)(a+2)\;.\;.\;.\;(a+k-1)} . k^{a-1} . \frac{k}{k+a},$$

wo k sowohl als a positiv sind, erstere einen unendlich großwerdenden und letztere irgend einen endlichen Zahlenwerth vorstellend; und da der Grenzwerth des Quotienten:

$$\frac{k}{k+a},$$

beim unendlichen Zunehmen von k, die positive Einheit ist, so hat man auch:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x} dx = \frac{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;.\;k.k^{a-1}}{a(a+1)(a+2)\;.\;.\;.\;(a+k-1)},$$

welche Gleichung den Werth des Integrals zur Linken durch die ohne Ende fortlaufende Factorenfolge zur Rechten darstellt.

Stellt man nun den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen durch $\Gamma(a)$ vor, so daß

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a) \qquad \text{(I)}$$

gesetzt wird, wo man:

$$\Gamma(a) = \frac{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;k.k^{a-1}}{a(a+1)(a+2)\;.\;.\;.\;(a+k-1)} \qquad \text{(II)}$$

hat, so werden wir, bevor wir weiter gehen, in der nächst folgenden Nr. darthun, daß diese Größe $\Gamma(a)$ unter der Annahme eines positiven und endlichen Werthes für a, als Function von a (nach Einleitung Nr. 6) sich herausstellt; oder die unendliche Factorenfolge, die wir durch $\Gamma(a)$ dargestellt haben, convergirt um so mehr gegen einen endlichen, von der positiven Größe a abhängigen Werth, je größer die ganze und positive Zahl k gedacht wird.

215. Die Gleichung (II) der vorangehenden Nr. kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\Gamma(a) = \frac{1^a}{a} \cdot \frac{2^a}{1^{a-1}(a+1)} \cdot \frac{3^a}{2^{a-1}(a+2)} \cdots \frac{k^a}{(k-1)^{a-1}(a+k-1)},$$

oder auch auf:

$$a\Gamma(a) = \frac{2^a}{1^{a-1}(a+1)} \cdot \frac{3^a}{2^{a-1}(a+2)} \cdots \frac{k^a}{(k-1)^{a-1}(a+k-1)};$$

werden beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen, so hat man:

$$\log. a\Gamma(a) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \log. \frac{(k+1)^a}{k^{a-1}(k+a)},$$

wo das Summenzeichen auf alle ganzen Zahlenwerthe von $k = +1$ bis $k = +\infty$ sich erstreckt. Von dieser, zur Rechten vom Gleichheitszeichen vorkommenden unendlichen Reihe, wollen wir nun darthun, daß dieselbe zu den convergenten gehöre; wodurch dann der Ausdruck $\log. a\Gamma(a)$, mithin auch:

$$a\Gamma(a) \text{ und folglich auch } \Gamma(a),$$

als eine von a abhängige und endliche Größe erkannt werden wird.

Wir legen zu diesem Zwecke den in Nr. 110 bewiesenen Lehrsatz zum Grunde. Vermöge dieses Satzes convergirt die in Rede stehende Reihe, wenn das bestimmte Integrale:

$$\int_1^\infty \log. \frac{(x+1)^a}{x^{a-1}(x+a)}\, dx$$

keinen unendlich großwerdenden Werth darbietet: sonach haben wir uns nur mit der Ausmittelung des Werthes dieses bestimmten Integrals zu befassen.

Man hat:

$$\int_1^\infty \log. \frac{(x+1)^a}{x^{a-1}(x+a)}\, dx =$$

$$a\int_1^\infty \log.(x+1)\,dx - (a-1)\int_1^\infty \log.x\,dx - \int_1^\infty \log.(x+a)\,dx,$$

oder auch, vermöge der Gleichungen:

$$\int_1^\infty \log.(x+1)\,dx = \int_2^\infty \log.x\,dx,$$

$$\int_1^\infty \log.(x+a)\,dx = \int_{a+1}^\infty \log.x\,dx,$$

die Gleichung:

$$\int_1^\infty \log.\frac{(x+1)^a}{x^{a-1}(x+a)}\,dx =$$

$$= a\int_2^\infty \log.x\,dx - (a-1)\int_1^\infty \log.x\,dx - \int_{a+1}^\infty \log.x\,dx\,,$$

die man auch folgendermaßen stellen kann:

$$\int_1^\infty \log.\frac{(x+1)^a}{x^{a-1}(x+a)}\,dx = -a\left\{\int_1^\infty \log.x\,dx - \int_2^\infty \log.x\,dx\right\}$$

$$+\left\{\int_1^\infty \log.x\,dx - \int_{1+a}^\infty \log.x\,dx\right\}\,,$$

welche, mit Zuziehung der Gleichung (8) Nr. 36, in folgende übergeht:

$$\int_1^\infty \log.\frac{(x+1)^a}{x^{a-1}(x+a)}\,dx = -a\int_1^2 \log.x\,dx + \int_1^{1+a} \log.x\,dx\,.$$

Ohne zur Angabe der Werthe der bestimmten Integralien rechter Hand bemüßiget zu sein, schließen wir sofort mit Zuziehung des in Nr. 107 begründeten Satzes, daß deren Werthe, wenn a positiv und endlich gedacht wird, nicht unendlich großwerdend sind.

Es ist also der Werth des bestimmten Integrals zur Linken vom Gleichheitszeichen der letzten Gleichung nicht unendlich großwerdend, woraus die Convergenz der Function $\Gamma(a)$ aus Gleichung (II), für alle endlichen und positiven Werthe von a, nach dem vorhin Bemerkten sogleich gefolgert wird.

216. Nachdem nun die Convergenz der ohne Ende fortlaufenden Factorenfolge oder der Function $\Gamma(a)$ dargethan wurde, schicken wir uns an einige Integralien durch dieselbe auszudrücken.

Läßt man in der Gleichung (I) Nr. 214 x in mx übergehen, so erhält man, für alle positiven und reellen Werthe von m und a, die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-mx}\,dx = \frac{1}{m^a}\Gamma(a)\,. \qquad (33)$$

Wird in dieser Gleichung:

$$e^{-x} \text{ in } x\,,\ \text{also } x \text{ in } \log.\frac{1}{x}$$

umgesetzt, so erhält man folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^1 x^{m-1}\left(\log.\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \frac{1}{m^a}\,\Gamma(a)\,, \qquad (34)$$

welche Gleichung für dieselben Werthe von m und a, als die vorangehende Bestand hat.

Ferner erhält man aus der Gleichung (33), wenn in derselben x in x^n und a in $\frac{a}{n}$ umgesetzt wird, unter der Voraussetzung, daß a, m und n positive, reelle Werthe vorstellen, die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-mx^n} dx = \frac{1}{n\sqrt[n]{m^a}}\,\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\,. \qquad (35)$$

217. Das Doppelintegrale:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx\right\} dy\,,$$

in dem a sowohl als b positive und reelle Größen vorstellen, führt, auf folgendem Wege behandelt, den Werth eines bis jetzt von uns noch nicht behandelten Integrals auf Factorenfolgen zurück, die wir durch das Functionzeichen Γ vorgestellt haben.

Zuerst ist man zur Aufstellung folgender Gleichheit berechtiget:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx\right\} dy = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx\right\}\; e^{-y}\,y^{b-1}\,dy,$$

welche, vermöge der Gleichung (33) vorangehender Nr., bei der Annahme $m = 1$, auf folgende Gleichung führt:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx\right\} dy = \int_0^\infty \Gamma(a)\;e^{-y}\,y^{b-1}\,dy\,,$$

die, vermöge derselben citirten Gleichung, da a unabhängig von y ist, in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx\right\} dy = \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,.$$

Fassen wir das innerhalb der Klammern zur Linken vom Gleichheitszeichen vorkommende bestimmte Integrale ins Auge, und lassen in demselben x in yx übergehen, so erhält man die Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,x^{a-1}\,y^{b-1}\,dx = y^{a+b-1}\int_0^\infty e^{-y(1+x)}\,x^{a-1}\,dx\,,$$

mittelst welcher die vorangehende Gleichung in folgende umgeformt erscheint:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-y(1+x)} x^{a-1} dx\right\} y^{a+b-1} dy = \Gamma(a)\Gamma(b) ,$$

oder auch, mit Beachtung der Gleichung (G) Nr. 155, in:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+x)y} dy\right\} x^{a-1} dx = \Gamma(a)\Gamma(b) .$$

Vollzieht man die Integration nach y mit Zuziehung der Gleichung (33), so erhält man:

$$\int_0^\infty \Gamma(a+b) \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \Gamma(a)\Gamma(b) ,$$

woraus:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{36}$$

gezogen wird; und wenn hier:

$$x \text{ in } \frac{1}{x} - 1$$

umgesetzt wird, so ergiebt sich nach einigen Reductionen die Gleichung:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} , \tag{37}$$

die für alle positiven und reellen Werthe von a und b besteht, und das anfangs dieser Nr. angekündigte bestimmte Integrale durch ohne Ende fortlaufende Factorenfolgen darstellt, welche durch die Function Γ ausdrückbar sind.

Da ferner der Ausdruck zur Rechten vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung als symmetrische Function von a und b sich herausstellt, so muß ein Gleiches vom bestimmten Integrale zur Linken vom Gleichheitszeichen ausgesagt werden können, oder man hat die Gleichung:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1} x^{a-1} dx , \tag{38}$$

die ebenfalls für positive und reelle Werthe von a und b besteht.

Das durch die Gleichung (37) ausgedrückte bestimmte Integrale werden wir, mit Legendre, Euler'sches Integrale der ersten Art und das in der Gleichung (I) Nr. 214 vorkommende bestimmte Integrale, nach demselben Autor, Euler'sches Integrale der zweiten Art nennen.

Stellt man also das Euler'sche Integrale der ersten Art durch $[b, a]$ vor, d. h., setzt man:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx = [b, a] \qquad \text{(III)}$$

so hat man, vermöge der Gleichungen (37) und (38), folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [b, a] = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \\ [b, a] = [a, b]. \end{array}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Eigentlich wird folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}},$$

Euler'sches Integrale der ersten Art, von Legendre benannt und mit Euler durch $\left(\frac{b}{a}\right)$ bezeichnet; allein da dieses bestimmte Integrale, wie sogleich gezeigt werden soll, in einer höchst einfachen Beziehung zu dem in Gleichung (37) dargestellten bestimmten Integrale steht, so ziehen wir es vor, einigen Geometern neuerer Zeit folgend, das zuletzt erwähnte bestimmte Integrale, nämlich das der Gleichung (37) als Euler'sches Integrale erster Art einzuführen.

Wird, um unsere vorige Behauptung zu rechtfertigen, in der Gleichung:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-a}}} = \left(\frac{b}{a}\right), \qquad \text{(V)}$$

zur Linken vom Gleichheitszeichen x^n in x umgesetzt, so geht dieselbe in folgende über:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-x)^{\frac{a}{n}-1} x^{\frac{b}{n}-1} dx,$$

und durch Vergleichung dieser Gleichung mit der obigen (III) hat man:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{b}{n}, \frac{a}{n}\right], \qquad \text{(VI)}$$

was zu zeigen war.

Man hat sonach auch folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{a-n}}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{b}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)}\,, \tag{39}$$

und da der Ausdruck zur Rechten symmetrisch in Bezug auf a und b ist, so gilt ein Gleiches vom Ausdrucke zur Linken, und man hat:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{a-n}}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{b-n}}}\,, \tag{40}$$

für alle positive und reelle Werthe von a und b.

248. Auch durch Differenzialquotienten der Function Γ lassen sich die Werthe einiger bestimmten Integralien ausdrücken.

Wird in Gleichung (33) Nr. 216, $m = 1$ gesetzt, und differenzirt man dann dieselbe nach a, so erhält man, wenn $\Gamma_1(a)$ den Differenzialquotienten von $\Gamma(a)$ nach a vorstellt, die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\log.x\,dx = \Gamma_1(a)\,, \tag{41}$$

die nur für positive Werthe von a Bestand hat.

Eben so bietet die Gleichung (37) vorangehender Nr., durch Differenziation nach a sowohl als nach b, zwei Integralbestimmungen dar, die, wenn noch das Ergebniß der Differenziation der Gleichung (38) derselben Nr. nach a zugezogen wird, durch folgende Gleichungen dargestellt werden können:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,x^{b-1}\log.(1-x)\,dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,x^{a-1}\log.x\,dx\,,\\
&\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,x^{b-1}\log.x\,dx = \left\{\frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma(b)\,\Gamma_1(a+b)}{\Gamma(a+b)^2}\right\}\Gamma(a)\,;
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

die zweite dieser Gleichungen geht auch, mit Beachtung der Gleichung (37) vorangehender Nr., über in:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,x^{b-1}\log.x\,dx = \left\{\frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma_1(a+b)}{\Gamma(a+b)}\right\}\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,x^{b-1}\,dx\,. \tag{43}$$

Vertauscht man hier a mit b und zieht die Gleichung (38) vorangehender Nr. zu, so ergiebt sich, nach vollzogener Subtraktion der neugewonnenen Gleichung von der so eben aufgestellten (43), folgender Zusammenhang:

$$\int_0^1 \left\{(1-x)^{a-1}x^{b-1} - (1-x)^{b-1}x^{a-1}\right\}\log.x\,dx =$$

$$= \left\{\frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}\right\}\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}\,dx\ ,$$

welcher mit Zuziehung der ersten obiger Gleichungen (42) auch i… folgenden übergeht:

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}\log.\frac{x}{1-x}\,dx = \left\{\frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}\right\}\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}\,dx;$$

wird hier, links vom Gleichheitszeichen, $\frac{x}{1-x}$ in x umgesetzt, so erhält man, nach einfacher Verbindung der Gleichungen (36) und (37) und mit Vertauschung von a mit b, folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\log.x\,dx = \left\{\frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)}\right\}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\ , \quad (4…$$

welche, wie sämmtliche vorangehende Gleichungen, für positive und reelle Werthe von a und b besteht.

219. Noch einige wichtige Gleichungen, betreffend die Function Γ, werden aus der Gleichung (59) Nr. 159 auf folgendem Wege gezogen.

Man setze in dieselbe $\alpha = 1$ und $\beta = y$, so geht sie über in:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\,dx = \log.y\ ;$$

diese Gleichung multipliciren wir mit $y^{a-1}e^{-y}\,dy$, und integriren dann dieselbe von $y = 0$ bis $y = \infty$, so ergiebt sich, mit Zuziehung der Gleichung (41) der vorangehenden Nr., folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\,dx\right\} y^{a-1}e^{-y}\,dy = \Gamma_1(a)\ ,$$

oder wenn, links vom Gleichheitszeichen, die nach y zu vollziehende Integration, der nach x vorangeschickt wird, erhält man auch folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy\right\}\frac{e^{-x}dx}{x} - \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty y^{a-1}e^{-(1+x)y}\,dy\right\}\frac{dx}{x} = \Gamma_1(a)\ ;$$

vollzieht man nun die angezeigten Integrationen nach y, mit Hülfe der Gleichung (33) Nr. 216, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \Gamma(a)\, e^{-x} \frac{dx}{x} - \int_0^\infty \Gamma(a) \frac{1}{(1+x)^a} \frac{dx}{x} = \Gamma_1(a)\,,$$

woraus folgende Integralbestimmung gewonnen wird:

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right\} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}\,. \tag{45}$$

Vertauscht man hier a mit b, so erhält man durch Subtraction der neugewonnenen Gleichung von der vorliegenden:

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{(1+x)^b} - \frac{1}{(1+x)^a} \right\} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)}\,;$$

und wenn links vom Gleichheitszeichen

$$x \text{ in } \frac{1}{x} - 1$$

umgesetzt wird, ergiebt sich auch folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{1 - x}\, dx = \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma_1(b)}{\Gamma(b)}\,. \tag{46}$$

Verbindet man endlich diese Gleichung mit der (44) vorangehenden Nr., so hat man folgende Beziehung:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \log.x\, dx = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{1-x}\, dx \,.\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx\,, \tag{47}$$

welche, wie alle vorangehenden, für positive und reelle Werthe von a und b besteht.

Aehnliche Beziehungen, wie die letzte Gleichung lassen sich noch mehrere aufstellen; wir unterlassen jedoch dieselben hier aufzunehmen, und machen uns in der nächstfolgenden Nr. daran, einige Eigenschaften der Function Γ vorzuführen, die theils in theoretischer Beziehung beachtenswerth sind, und theils auch bei der numerischen Bestimmung der Function $\Gamma(a)$ für verschiedene Werthe der Stammgröße a große Erleichterungen darbieten.

220. Da uns die Integralrechnung zur Kenntniß der Function

Γ geführt hat, so wollen wir auch, zumal in ganz jüngster Zeit Dirichlet die einzige noch unerledigte Stelle auf eine höchst eleganten Weise gelöst hat, sämmtliche bis jetzt bekannte Eigenschaften dieser Function aus der Integralrechnung selbst fließen lassen.

Wird in der Gleichung (33) Nr. 216, $m = 1$ angenommen, wo durch dieselbe in:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a)$$

übergeht, so hat man, wenn nun a in $a+1$ umgesetzt wird,

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \Gamma(a+1) ;$$

durch theilweise Integration hat man aber für jeden positiven Werth von a:

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} dx = a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx ,$$

daher erhält man folgende Beziehung:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) .$$

Geht in dieser Gleichung die Größe a nach und nach in $a+1$, $a+2, \ldots a+m-1$ über, so erhält man, durch Multiplication sämmtlicher so erhaltenen Gleichungen, folgende Beziehung:

$$\Gamma(a+m) = a(a+1)(a+2) \ldots (a+m-1)\Gamma(a) ,$$

in der m irgend eine ganze und positive Zahl bedeutet.

Denkt man sich nun die Function $\Gamma(a)$ für alle positiven Werthe von a, die zwischen a und $a+1$ liegen gerechnet, so führt dann diese Gleichung auf den numerischen Werth der Function $\Gamma(a)$ für jeden positiven Werth von a. Vermöge Legendre's Tabellen, die den Werth dieser Funcrion von $a = 1$ bis $a = 2$ enthalten, wird man mittelst dieser Gleichung den Werth der Function $\Gamma(a)$, für irgend einen positiven Werth von a, jedesmal auf einen zwischen 1 und 2 fallenden Werth von a dieser Function zurück führen.

Wäre z. B. die Function $\Gamma(\frac{17}{3})$ auszudrücken, so setze man in die obige Gleichung:

$$a+m = \tfrac{17}{3} \text{ und } a = 1 + \tfrac{2}{3}, \text{ also } m = 4 ,$$

wodurch:

$$\Gamma(\tfrac{17}{3}) = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{8}{3} \cdot \tfrac{11}{3} \cdot \tfrac{14}{3}\, \Gamma(1+\tfrac{2}{3})$$

erhalten wird; wäre zweitens der Werth von $\Gamma(\frac{1}{3})$ anzugeben, so setze man in die obige Gleichung:

$$a + m = 1 + \tfrac{1}{5} \text{ und } a = \tfrac{1}{5}, \text{ also } m = 1,$$

dadurch geht dieselbe in:

$$\Gamma(1+\tfrac{1}{5}) = \tfrac{1}{5}\Gamma(\tfrac{1}{5})$$

über, aus der dann:

$$\Gamma(\tfrac{1}{5}) = 5\,\Gamma(1+\tfrac{1}{5})$$

gezogen wird; und da sowohl $\Gamma(1+\frac{2}{5})$, als $\Gamma(1+\frac{1}{5})$ nach der getroffenen Annahme entweder als bereits bestimmt oder, wie wir in der Folge zeigen werden, als bestimmbar angesehen werden kann, so bieten die so eben aus (γ) gezogenen zwei Gleichungen die Werthe von $\Gamma(\frac{12}{5})$ und $\Gamma(\frac{1}{5})$ dar. Ein analoges Bewenden hat es mit allen Werthen der Function $\Gamma(a)$, für jeden positiven Werth von a, der entweder größer als 2 oder kleiner als 1 ist.

Ferner erfahren wir aus der Gleichung (γ) den Werth von $\Gamma(a)$ für jeden ganzen und positiven Werth von a; wird nämlich in dieser Gleichung $a = 1$ angenommen, so erhält man:

$$\Gamma(m+1) = 1.2.3.4 \ldots m\,\Gamma(1),$$

setzt man in die Gleichung (α) $a = 1$, so ergiebt sich:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

daher hat man, wenn in der vorigen Gleichung $m+1$ in a umgesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma(a) = 1.2.3.4 \ldots (a-1), \\ \Gamma(1) = 1, \end{array}\right\} \qquad (\delta)$$

so daß die erste dieser zwei Gleichungen nur für ganze und positive Werthe von a stattfindet.

221. Die Gleichung (36) Nr. 217 geht für die Annahme:

$$a + b = 1,$$

mit Beachtung der zweiten obiger Gleichungen (δ), in folgende über:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

in der a kleiner als 1 und größer als Null sein muß; berücksichtiget man nun die Gleichung (13) Nr. 141, so erhält man statt der letzten Gleichung auch folgende:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}.a\pi}, \qquad (\varepsilon)$$

die sonach für alle zwischen 0 und 1 fallende Werthe von a besteht.

Mittelst dieser Gleichung kann man die Werthe der Function $\Gamma(a)$, für die Werthe von a, welche zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, durch jene Werthe derselben Function darstellen, die den zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 fallenden Werthen der Stammgröße a entsprechen, und umgekehrt.

Für die Annahme $a = \frac{1}{2}$ bietet dieselbe die Gleichung:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \pi$$

dar, woraus:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

gezogen wird.

Von derselben Gleichung (ε) konnte auch Legendre bei der Berechnung der, die Function $\Gamma(a)$ von $a = 1$ bis $a = 2$ darstellenden Tabelle großen Vortheil ziehen. Es bietet nämlich die Gleichung (γ) vorangehender Nr. folgende zwei Gleichungen dar:

$$\Gamma(1+a) = a\,\Gamma(a)\ ,$$

$$\Gamma(2-a) = (1-a)\,\Gamma(1-a)\ ;$$

diese zwei Gleichungen mit einander multiplicirt, bieten, mit Beziehung der Gleichung (ε), folgenden Zusammenhang dar:

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(2-a) = \frac{a(1-a)\pi}{\mathrm{Sin.}\,a\pi}\ ;$$

wird nun hier für a einer der Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ angenommen, so fällt $1 + a$ zwischen 1 und $1 + \frac{1}{2}$ und $2 - a$ zwischen $1 + \frac{1}{2}$ und 2: daher reducirt sich die Schwierigkeit der Berechnung oben erwähnter Tabelle auf jene Werthe von a, die zwischen 1 und $1+\frac{1}{2}$ enthalten sind; denn mit Hülfe der letzten Gleichung unterliegt alsdann die numerische Bestimmung der Function $\Gamma(a)$, für die zwischen $1 + \frac{1}{2}$ und 2 fallenden Werthe von a keiner besondern Schwierigkeit.

Auf dieselbe Gleichung (ε) wird man auch mittelst einer der Gleichungen (b) und (c) Nr. 160 geführt. Berücksichtiget man nämlich die Gleichung (a) a. a. O., und wird in der Gleichung (35) Nr. 210 $m = 1$ vorausgesetzt, so bietet die Gleichung (b) Nr. 160, nach Einführung der Function Γ, zunächst folgenden Zusammenhang dar:

$$\frac{1}{(n+m)^2}\,\Gamma\left(\frac{m}{n+m}\right)\Gamma\left(\frac{n}{n+m}\right) = \frac{\pi}{(n+m)^2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{n-m}{n+m}\frac{\pi}{2}}\ ;$$

und wenn hier $m = a$ und $n = 1 - a$ angenommen wird, erhält man:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{Cos.}(1-2a)\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin.}a\pi},$$

welche identisch mit der obigen Gleichung (ε) ist.

222. Wenden wir uns ferner zur Gleichung (37) Nr. 217, und lassen in derselben x in $\operatorname{Sin.}x^2$ übergehen, so geht dieselbe in folgende über:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos.}x^{2a-1}\,\operatorname{Sin.}x^{2b-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

wenn hier a in $\frac{1}{2}a$ und b in $\frac{1}{2}b$ übergeht, erhält man zunächst die Integralbestimmung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos.}x^{a-1}\,\operatorname{Sin.}x^{b-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)}, \tag{48}$$

aus der, je nachdem $a=1$ oder $b=1$ angenommen wird, mit Zuziehung der Gleichung (ζ) vorhergehender Nr., auch folgende zwei Integralbestimmungen hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin.}x^{a-1}\,dx &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)},\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cos.}x^{a-1}\,dx &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir nun eine neue Relation, die Function $\Gamma(a)$ betreffend, ableiten.

Wird in der ersten der beiden Gleichungen (49) x in $\pi - x$ umgesetzt, und die sich so ergebende Gleichung zur unveränderten addirt, so erhält man:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Sin.}x^{a-1}\,dx = \sqrt{\pi}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}; \tag{50}$$

wenn ferner in der Gleichung (48) $a=b$ angenommen und x in $\frac{x}{2}$ umgesetzt wird, erhält man auch:

$$\frac{n\,\Gamma_1(na)}{\Gamma(na)} - \left(\frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma_1\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)} + \frac{\Gamma_1\left(a+\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)} + \ldots + \frac{\Gamma_1\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}\right) = nN$$

oder auch, wenn einstweilen:

$$\log.\Gamma(na) - \left\{\log.\Gamma(a) + \log.\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots + \log.\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\} =$$

gesetzt wird, in folgende:

$$f_1(a) = nN\ ,$$

wo $f_1(a)$ den Differenzialquotienten der Function $f(a)$ nach a vorstellt.

Zieht man aber das Fundamentaltheorem der Differenzialrechnung Nr. 16, II zu Hülfe, so ergiebt sich:

$$f(a) = nNa + N_1\ ,$$

wo N_1 eine willkührliche, jedoch von a unabhängige Größe vorstellt. wird daher der vorige Werth von $f(a)$ wiederum hergestellt, so erhält man:

$$\log.\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)} = nNa + N_1\ ,$$

woraus die Gleichung:

$$\Gamma(na) = \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) e^{N_1}\, e^{nNa}$$

gezogen wird, in der e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Um die von a unabhängigen Größen N und N_1 zu ermitteln, lassen wir hier a in $a + \frac{1}{n}$ übergehen; dadurch erhält man, nach geschehener Division der neugewonnenen Gleichung durch die unveränderte, folgende Gleichung:

$$\frac{\Gamma(na+1)}{\Gamma(na)} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\, e^N\ ,$$

welche, mit Zuziehung der Gleichung (β) Nr. 220, in folgende übergeht:

$$na = a\,e^N\ ,$$

aus der

$$e^N = n$$

gezogen wird; es geht daher die obige Gleichung in folgende über:

$$\Gamma(na) = \Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)n^{na}\,e^{N_1},$$

und es erübriget nur noch die Ausmittelung der von a unabhängigen Größe N_1, zu deren Kenntniß wir auf folgendem Wege gelangen.

Man setze hier $a=\frac{1}{n}$, so erhält man die Gleichung:

$$\Gamma(1) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)n\,e^{N_1},$$

die, wegen:

$$\Gamma\left(\frac{n}{n}\right) = \Gamma(1),$$

in folgende übergeht:

$$1 = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)n\,e^{N_1},$$

oder auch in folgende:

$$1 = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)n\,e^{N_1};$$

multiplicirt man diese zwei Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$1 = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right).\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right).n^2\,e^{2N_1}.$$

Um aus dieser Gleichung den Werth von N_1 zu erhalten, setze man in die Gleichung (ε) Nr. 221 statt a nach und nach:

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots\frac{n-1}{n},$$

und substituire dann das Ergebniß des Productes dieser so erzeugten Gleichungen in die zuletzt aufgestellte; dadurch erhält man die Gleichung:

$$1 = \frac{\pi}{\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\mathrm{Sin.}\frac{3\pi}{n}}\ldots\frac{\pi}{\mathrm{Sin.}\frac{(n-1)\pi}{n}}.n^2\,e^{2N_1};$$

aus der, auf folgendem Wege, der Werth von N_1 ermittelt wird.

Löst man das Binomium $1-x^{2n}$, in dem n eine ganze und positive Zahl vorstellt, in die demselben zugehörenden reellen Factoren des zweiten Grades auf, so hat man die Gleichheit:

$$\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} = \left(1 - 2x\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{2n} + x^2\right)\left(1 - 2x\,\mathrm{Cos.}\frac{4\pi}{2n} + x^2\right)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\left(1 - 2x\,\mathrm{Cos.}\frac{(2n-2)\pi}{2n} + x^2\right);$$

wird hier $x=1$ und $x=-1$ gesetzt, so ergeben sich, wenn der Ausdruck zur Linken vom Gleichheitszeichen nach Differenzialrechnung II, Nr. 29 behandelt wird, folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n &= \left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{3\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2, \\ n &= \left(2\,\mathrm{Cos.}\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{2n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Cos.}\frac{3\pi}{2n}\right)^2\ldots\left(2\,\mathrm{Cos.}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)^2, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

und durch Multiplikation derselben miteinander geht folgende hervor:

$$n^2 = \left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{n}\right)^2\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{3\pi}{n}\right)^2\ldots\left(2\,\mathrm{Sin.}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^2,$$

aus der:

$$n = 2^{n-1}\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{n}\,\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{Sin.}\frac{3\pi}{n}\ldots\mathrm{Sin.}\frac{(n-1)\pi}{n} \qquad (b)$$

gezogen wird.

Substituirt man nun dieses Ergebniß in die vorige Gleichung, so hat man:

$$1 = (2\pi)^{n-1}\, n\, e^{2N_1},$$

aus der

$$e^{N_1} = \frac{1}{\sqrt{n}\,.\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}$$

gewonnen wird, und man erhält endlich:

$$\Gamma(na) = \Gamma(a)\,\Gamma\!\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\!\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\!\left(a+\frac{n-1}{n}\right) n^{na-\frac{1}{2}}\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}, \quad (\vartheta.$$

welche die anfangs dieser Nr. angekündigte, allgemeine Relation ist, die, für die besondere Annahme $n=2$, die Relation (ϑ) der vorangehenden Nr. erzeugt.

224. Nachdem die vorzüglichsten, bis jetzt bekannten Eigenschaften der Function $\Gamma(a)$ mitgetheilt worden sind, erübriget noch Einiges über die numerische Bestimmung dieser Function, für irgend einen zwischen 1 und 2 fallenden Werth von a mitzutheilen.

Legen wir zu diesem Zwecke die Gleichung (II) Nr. 214 zu Grunde,

so kann man vorerst mit Zuziehung einer Logarithmentafel, wenn in der citirten Gleichung k nur als endliche Zahl auftritt, jedesmal ein angenähertes Resultat erzielen: das um so genauer ausfallen muß, je größer dieser ganze Zahlenwerth von k angenommen wird. Schneller gelangt man aber zum Ziele, wenn man den natürlichen Logarithmus von $\Gamma(a)$, oder besser von $\Gamma(1+a)$ in eine, nach aufsteigenden Potenzen von a fortgehende Reihe auflöst, und sich dieser Reihe bei numerischen Bestimmungen bedient.

Setzt man also in der citirten Gleichung (II) a in 1+a um, so ergiebt sich, wenn solche alsdann logarithmisch aufgelöst wird, folgende Gleichheit:

$$\log.\Gamma(1+a) = a\log.k - \log.\left(1+\frac{a}{1}\right) - \log.\left(1+\frac{a}{2}\right)$$
$$- \log.\left(1+\frac{a}{3}\right) - \ldots\ldots - \log.\left(1+\frac{a}{k}\right) \;;$$

wird hier $a < 1$ festgestellt, so kann man die Ausdrücke zur Rechten nach aufsteigenden Potenzen von a in convergente Reihen auflösen, wodurch folgende Gleichheit erhalten wird:

$$\log.\Gamma(1+a) = ca + \tfrac{1}{2}S_2a^2 - \tfrac{1}{3}S_3a^3 + \tfrac{1}{4}S_4a^4 - \tfrac{1}{5}S_5a^5 + \ldots, \quad \text{(VII)}$$

in der die Größe c durch eine der Grenzgleichungen (A) Nr. 202 gegeben ist, oder man hat für c die Grenzgleichung:

$$c = \mathrm{Lim}:\left\{\log.k - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{k}\right)\right\} \;;$$

deren Werth die Gleichung (α) Nr. 201 darstellt; die Größen S_2, S_3, S_4, . . . betreffend, können dieselben aus folgender allgemeinen Gleichung entnommen oder bestimmt werden:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots .$$

Diese Gleichung (VII) kann auch, wie folgt, durch eine viel einfachere ersetzt werden.

Läßt man in dieser Gleichung a in $-a$ übergehen, so erhält man, durch Addition der neugewonnenen Gleichung zur ursprünglichen, folgende:

$$\tfrac{1}{2}\log.\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \tfrac{1}{2}S_2a^2 + \tfrac{1}{4}S_4a^4 + \tfrac{1}{6}S_6a^6 + \ldots\ldots ;$$

multiplicirt man die Gleichung (ε) Nr. 221 mit a und setzt, nach Gleichung (β) Nr. 220, $\Gamma(1+a)$ statt $a\Gamma(a)$, so erhält man auch:

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \frac{a\pi}{\mathrm{Sin}.a\pi},$$

wodurch die vorige Gleichung in folgende übergeht:

$$\tfrac{1}{2}\log.\frac{a\pi}{\mathrm{Sin}.a\pi} = \tfrac{1}{2}S_2a^2 + \tfrac{1}{4}S_4a^4 + \tfrac{1}{6}S_6a^6 + \ldots\ldots;$$

verbindet man nun diese Gleichung, durch Subtraktion, mit der Gleichung (VII), so erhält man die Gleichung:

$$\log.\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log.\frac{a\pi}{\mathrm{Sin}.a\pi} + ca - \tfrac{1}{3}S_3a - \tfrac{1}{5}S_5a^5 - \tfrac{1}{7}S_7a^7 - .,\quad \text{(VIII)}$$

die offenbar bei numerischen Bestimmungen leichter als (VII) zu handhaben ist.

Eine noch schneller zum Ziele führende Gleichung erhält man, wenn diese so eben aufgestellte mit der folgenden:

$$\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+a}{1-a} = a + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{5}a^5 + \tfrac{1}{7}a^7 + \ldots,$$

durch Addition verbunden wird, man erhält nämlich alsdann:

$$\log.\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log.\frac{a(1-a)\pi}{(1+a)\mathrm{Sin}.a\pi} +$$

$$+ (1+c)a - \tfrac{1}{3}(S_2-1)a^3 - \tfrac{1}{5}(S_5-1)a^5 - \tfrac{1}{7}(S_7-1)a^7 - \ldots,\quad \text{(IX)}$$

welche, da S_3-1, S_5-1, S_7-1, . . . sämmtlich kleiner als die Einheit sind, in Rücksicht auf schnelle Convergenz den beiden vorangehenden unstreitig vorzuziehen ist.

Nunmehr erübriget uns noch, die numerische Bestimmung der Größen S_3, S_5, S_7, . . . vorzunehmen und zusammen zu stellen, um in allen vorkommenden Fällen von dieser Reihe (IX) Gebrauch machen zu können. Die folgende Nr. soll ganz diesem Gegenstande gewidmet sein.

225. Stellen wir die den Werth von S_n darstellende Gleichung noch einmal auf, nämlich:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \ldots,\quad (a)$$

so kann man, nach Absonderung der an den geraden, von den an den ungeraden Stellen stehenden Gliedern zur Rechten vom Gleichheitszeichen, auch folgende Gleichung aufstellen:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \ldots\right);$$

der Ausdruck innerhalb der Klammern, auf der zweiten Zeile dieser Gleichung stellt aber den Werth von S_n vor, daher hat man auch:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \ldots.$$

Sondert man ferner, zur Rechten vom Gleichheitszeichen, jene Glieder ab, deren Nenner durch 3^n theilbar sind, so hat man auch folgende Gleichung:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \ldots.$$
$$+ \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \ldots\ldots\right),$$

wo die Nenner auf der ersten Zeile rechts vom Gleichheitszeichen keinen der Factoren 2^n oder 3^n enthalten; verbindet man diese Gleichung mit der unmittelbar vorangehenden, so ergiebt sich:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \ldots.$$

Werden ferner jene Glieder zur Rechten vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung, deren Nenner den Factor 5^n enthalten, von den übrigen Gliedern abgesondert zusammengestellt, so erhält man die Gleichung:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{5^n}\left(1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \ldots\right),$$

welche, mit der zunächst vorangehenden verbunden, auf folgende führt:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \ldots,$$

in der, rechts vom Gleichheitszeichen, alle jene Glieder fehlen, so von der Form $\frac{1}{a^n}$ sind, wo a ein ganzes Vielfache von 2, 3 und 5 ist.

Wird in dieser Weise fortgefahren, so kommt man endlich auf die Gleichung:

$$S_n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)=1+R, \quad (b)$$

wo abkürzend:

$$R=\frac{1}{\alpha_1^n}+\frac{1}{\alpha_2^n}+\frac{1}{\alpha_3^n}+\frac{1}{\alpha_4^n}+\text{ in inf.} \quad (c)$$

gesetzt wurde.

In der Gleichung (b), zur Linken, stellen die mit dem Exponenten n versehenen Zahlen:

$$2, 3, 5, 7, \ldots \alpha ,$$

sämmtliche von 2 bis α vorhandene Primzahlen dar, und wie aus der Entstehung dieser Gleichung hervorgeht, ist keine dieser Zahlen ein Factor der in der Gleichung (c) vorkommenden ganzen Zahlen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots ;$$

diese letzteren betreffend, stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die auf α in natürlicher Ordnung der Größe folgenden Primzahlen vor, die erste zusammengesetzte Zahl, welche die Reihe dieser Primzahlen unterbricht, und ein Glied in der obigen Gleichung (c) abgiebt, ist α_1^2, so daß man die Ungleichheiten hat:

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_k < \alpha_1^2 < \ldots,$$

wo α_k die letzte und größte Primzahl ist, welche jene ununterbrochene Folge von Primzahlen schließt, die größer als α sind.

Auf das Glied

$$\frac{1}{(\alpha_1^2)^n}$$

folgen in der Gleichung (c) noch unendlich viele Glieder, deren Zähler sämmtlich die Einheit und deren Nenner ganze Zahlen vorstellen, die, abwechselnd, prim oder vielfache der Primzahlen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots . \alpha_k$$

sind.

Die Größe R, die man als Ergänzung ansehen kann, falls mit irgend einer endlichen Primzahl α die Rechnung abgebrochen oder geschlossen wird, giebt über den jedesmaligen Fehler Aufschluß, mit dem alsdann S_n bestimmt wurde. Denn bekanntlich ist die An-

zahl der Primzahlen unendlich groß*), daher hat diese Größe R, man mag der Primzahl α einen noch so großen, jedoch endlichen Werth beilegen, einen von Null verschiedenen Werth, der, mit Zuziehung der Gleichung (c), bei jeder über α getroffenen Annahme immer beurtheilt werden kann.

Ferner nimmt man aus dem für R aufgestellten Werthe ab, daß wenn $n > 1$ und α eine ohne Ende wachsende Primzahl ist, daß alsdann diese Größe R auch vernachlässiget werden kann. Denn offenbar hat man:

$$R < \frac{1}{(\alpha+1)^n} + \frac{1}{(\alpha+2)^n} + \frac{1}{(\alpha+3)^n} + \frac{1}{(\alpha+4)^n} + \text{in inf.} \;;$$

und da der Ausdruck zur Rechten vom Ungleichheitszeichen die Ergänzung der in Nr. 120 betrachteten unendlichen Reihe (II) ist, falls man daselbst mit dem Gliede $\frac{1}{\alpha^n}$ die Rechnung schließt; und da diese Reihe, bei der gegenwärtigen Annahme über n, zu den convergenten gezählt wird, so ist die Ergänzung derselben, bei der getroffenen Annahme über α unendlich kleinwerdend, daher ist um so mehr, bei derselben Annahme über α, auch die Größe R der Gleichung (c) unendlich kleinwerdend, und zu vernachlässigen gestattet.

Gehen wir daher von der Annahme aus: α sei eine unendlich großwerdende Primzahl und $n > 1$, so kann man die Gleichung (b) auch folgendermaßen stellen.

---

*) Diese Behauptung kann auch, wie folgt, gerechtfertiget werden. Wäre nämlich die Anzahl der Primzahlen endlich und begrenzt, so sei die größte Primzahl, über die hinaus nur noch zusammengesetzte Zahlen sich vorfinden, durch α vorgestellt; alsdann geht die Gleichung (b), da nunmehr $R = 0$ sein muß, bei der Annahme $n = 1$ in folgende über:

$$S_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{10}{11} \cdots \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 \;,$$

aus der

$$S_1 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{11}{10} \cdots \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

gezogen wird.

Nach derselben Annahme über α hat man rechts vom Gleichheitszeichen eine endliche Anzahl endlicher Factoren, sonach stellt sich S_1 als endliche Größe heraus; die Gleichung (a) aber stellt, für die Annahme $n = 1$, S_1 als unendlich großwerdende Größe dar (Nr. 120), daher ist die vorangehende Gleichung unstatthaft, oder die Anzahl sämmtlicher Primzahlen ist unendlich großwerdend.

$$S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)}, \quad (d)$$

wo die Zahlen:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots\ \alpha$$

die Reihe sämmtlicher Primzahlen von 2 bis ∞ vorstellen.

Mittelst dieser Gleichung (d), die schon von Euler mitgetheilt wurde, oder, wenn dieselbe vorerst logarithmisch aufgelöst wird, mittelst folgender:

$$\log. S_n = \Sigma_1 + \tfrac{1}{2}\Sigma_2 + \tfrac{1}{3}\Sigma_3 + \tfrac{1}{4}\Sigma_4 + \tfrac{1}{5}\Sigma_5 + \text{in inf.}, \quad (e)$$

kann man den natürlichen Logarithmus von S_n bestimmen, und alsdann in Ermangelung einer Logarithmentafel, die mehr als sieben Decimalstellen angiebt, mittelst folgender Reihe:

$$S_n = 1 + \log.S_n + \frac{1}{1.2}(\log.S_n)^2 + \frac{1}{1.2.3}(\log.S_n)^3 + \ldots$$

den Werth von S_n selbst mit jeder beliebigen Schärfe bestimmen.

Die Größen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... stellen die Summen der reciproken Werthe der ersten, zweiten, dritten u. s. f. Potenzen der mit dem Exponenten n begabten Primzahlen von 2 bis ∞ vor, oder man hat allgemein:

$$\Sigma_k = \frac{1}{2^{nk}} + \frac{1}{3^{nk}} + \frac{1}{5^{nk}} + \frac{1}{7^{nk}} + \frac{1}{11^{nk}} + \frac{1}{13^{nk}} + \text{in inf.} \quad (f)$$

Mit einer bis auf die siebente Decimalstelle sich erstreckenden Genauigkeit, sind auf dem hier bezeichneten Wege die Werthe von:

$$S_5,\ S_7,\ S_9,\ S_{11},\ S_{13},\ S_{15},\ \ldots$$

bestimmt und die Ergebnisse mit denen von Legendre in Uebereinstimmung gefunden worden, und da man mit Hülfe dieser Größen, wie sogleich gezeigt werden soll, nicht nur zur Kenntniß von S_3, sondern auch zum Zahlenwerthe der Größe c aus den Nrn. 201 und 202 gelangen kann, so lassen wir hier die Werthe der Größen S_5, S_7, S_9, ... wie solche Legendre bis auf 16 Decimalstellen bestimmt hat, folgen, um dann mit gleicher Genauigkeit die Bestimmung der beiden, vorhin bezeichneten Größen S_3 und c vornehmen zu können.

Nach Legendre also, hat man:

$$S_5 = 1{,}03692\ 77551\ 433700$$
$$S_7 = 1{,}00834\ 92773\ 819227$$

$S_9 = 1{,}00200\ 83928\ 260822$

$S_{11} = 1{,}00049\ 41886\ 041194$

$S_{13} = 1{,}00012\ 27133\ 475785$

$S_{15} = 1{,}00003\ 05882\ 363070$

$S_{17} = 1{,}00000\ 76371\ 976379$

$S_{19} = 1{,}00000\ 19082\ 127166$

$S_{21} = 1{,}00000\ 04769\ 329868$

$S_{23} = 1{,}00000\ 01192\ 199260$

$S_{25} = 1{,}00000\ 00298\ 035035$

$S_{27} = 1{,}00000\ 00074\ 507118$

$S_{29} = 1{,}00000\ 00018\ 626597$

$S_{31} = 1{,}00000\ 00004\ 656629$

$S_{33} = 1{,}00000\ 00001\ 164155$

$S_{35} = 1{,}00000\ 00000\ 291038$

$S_{37} = 1{,}00000\ 00000\ 072759$

u. s. w., wo bereits jede folgende Zeile, in den Decimalen, den vierten Theil der vorangehenden beträgt.

Mit Hülfe dieser Größen und der Gleichung (IX) vorhergehender Nr. übergehen wir nun zur Bestimmung von S_3 und c.

Wird in der citirten Gleichung $-\frac{1}{2}$ statt a gesetzt, so erhält man, mit Beachtung der Gleichung (η) Nr. 221,

$$0 = \tfrac{1}{2}\log.\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(1+c) + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}(S_3-1) + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}(S_5-1) + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}(S_7-1) + \ldots$$

oder auch:

$$1+c - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}(S_3-1) = \log.\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}(S_5-1) + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}(S_7-1) + \ldots;$$

nimmt man ferner in derselben Gleichung $a=1$ an, zieht dann die erste der Gleichungen (δ) Nr. 220, wie das in der Differenzialrechnung Nr. 29 Mitgetheilte zu Hülfe, so ergiebt sich:

$$1 + c - \tfrac{1}{3}(S_3-1) = \tfrac{1}{2}\log.2 + \tfrac{1}{5}(S_5-1) + \tfrac{1}{7}(S_7-1) + \ldots;$$

und wenn man, nachdem die erste dieser zwei Gleichungen mit 2^2 multiplicirt wurde, die numerischen Werthe der Ausdrücke zur Rechten ermittelt, so erhält man statt der letzten zwei Gleichungen die folgenden:

$$4(1+c) - \frac{1}{3}(S_3-1) = 1{,}62378\ 50393\ 40670\ 55\ ,$$

$$(1+c) - \frac{1}{3}(S_3-1) = 0{,}35543\ 20340\ 45269\ 01\ ,$$

aus denen folgende Bestimmungen gezogen werden:

$$1+c = 0{,}42278\ 43350\ 98467\ 18$$

$$S_3-1 = 0{,}20205\ 69031\ 59594\ 51\ ,$$

und hieraus:

$$c = -0{,}57721\ 56649\ 01532\ 82$$

$$S_3 = 1{,}20205\ 69031\ 59594\ 51\ ,$$

welche Resultate, bis auf die zwei letzten Decimalen, mit den Legendre'schen schön übereinstimmen. Stellen wir daher die Werthe von S_3 und c nur mit 16 Decimalen auf, so hat man, nach Legendre,

$$S_3 = 1{,}20205\ 69031\ 595943$$

und

$$c = -0{,}57721\ 56649\ 015329\ . \qquad (\alpha')$$

Die erste dieser Gleichungen ergänzt die obige Werthenreihe der Größe S_n für ungerade Werthe von n; die letztere oder (α') ersetzt jedesmal die Gleichung (α) Nr. 201, oder die Größe c dieser Gleichung (α') ist gleichbedeutend mit der in den Nrn. 201, 202 u. f. f. öfters zur Anwendung gebrachten Größe c, die auch durch jede der drei Grenzgleichungen (A) Nr. 202 gegeben ist.

226. Nachdem nun die numerischen Werthe von S_3, S_5, S_7,.. und c, nach der vorhergehenden Nr., als gegeben oder bekannt angesehen werden dürfen, ersieht man auch sofort, daß man die numerische Bestimmung von $\Gamma(1+a)$, zumal für Werthe von a, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, viel schneller mit der Gleichung (IX) als mit der unendlichen Factorenfolge in Gleichung (I) vollziehen wird. Die Brauchbarkeit dieser Reihe zu veranschaulichen, legen wir uns folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13}\,dx$$

zur numerischen Bestimmung vor.

Mit Zuziehung der Gleichung (35) Nr. 216 hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13}\,dx = \tfrac{1}{3}\Gamma(\tfrac{14}{3}) = \tfrac{1}{3}\Gamma(4+\tfrac{2}{3})\ ;$$

ferner hat man nach Gleichung (γ) Nr. 220,

$$\Gamma(4+\tfrac{2}{3}) = \Gamma(1+\tfrac{2}{3}+3) = (1+\tfrac{2}{3})(2+\tfrac{2}{3})(3+\tfrac{2}{3})\,\Gamma(1+\tfrac{2}{3})\ ,$$

daher hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\, x^{13}\, dx = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{11}{3}\; \Gamma(1+\tfrac{2}{3})\ ;$$

wird in Gleichung (η) Nr. 221, $a = \frac{2}{3}$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\Gamma(1+\tfrac{2}{3})\,\Gamma(1+\tfrac{1}{3}) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\pi}{\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\,\mathrm{Sin.}\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\ ,$$

woraus:

$$\Gamma(1+\tfrac{2}{3}) = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{3})}$$

gezogen wird, sonach hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\, x^{13}\, dx = \frac{5.8.11}{3^6}\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{3})}\ ,$$

und es erübriget nur noch die Bestimmung von $\Gamma(1+\frac{1}{3})$, die wir mit Hülfe der Gleichung (IX) Nr. 224 vollziehen werden.

Setzt man in diese Gleichung $a = \frac{1}{3}$, und substituirt daselbst die in der vorigen Nr. für $1+c$, S_3, S_5, S_7, S_9, S_{11} aufgestellten Werthe, so erhält man, wenn bis und mit dem Gliede a^{11} abgebrochen wird,

$$\log.\Gamma(1+\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\log.\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 0{,}1384026318\ .$$

Bezeichnet man der Kürze wegen den numerischen Werth des zu bestimmenden Integrals durch u, und nimmt dann in der letzten der vorhergehenden Gleichungen beiderseits die natürlichen Logarithmen, so hat man:

$$\log.u = \log.\frac{5.8.11}{3^6}\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{3}} - \log.\Gamma(1+\tfrac{1}{3})\ ;$$

wird hier der soeben für $\log.\Gamma(1+\frac{1}{3})$ aufgestellte Werth eingesetzt, so erhält man:

$$\log.u = \log.\frac{4.5.8.11}{3^5} + \tfrac{1}{2}\log.\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 0{,}1384026318\ ,$$

und mit Zuziehung der Callet'schen Logarithmentafel

$$\log.u = 1{,}9800076447 - 0{,}2515942736 - 0{,}1384026318\ ,$$

oder

$$\log.u = 1{,}5900107393\ ;$$

bezeichnet man den gemeinen Logarithmus von u durch Log.u, so hat man:

$$\text{Log.}u = 0,6905328902\ ,$$

woraus, mit Hülfe einer jeden siebenstelligen Logarithmentafel,

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13}\,dx = 4,903802$$

gefunden wird.

227. Wir haben auch die Werthe einiger bestimmten Integralien von dem Differenzialquotienten der Function $\Gamma(a)$ abhängig dargestellt (Nr. 218 und 219); aus diesem Grunde differenziren wir auch die Gleichung (IX) nach a, wodurch die Gleichung:

$$\frac{\Gamma_1(1+a)}{\Gamma(1+a)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a} - \frac{2}{1-a^2} - \pi\,\frac{\text{Cos.}a\pi}{\text{Sin.}a\pi}\right]$$
$$+ (1+c) - (S_3-1)a^2 - (S_5-1)a^4 - (S_7-1)a^6 - (S_9-1)a^8 - \ldots \quad \text{(X)}$$

erhalten wird, mittelst welcher nunmehr auch die von $\Gamma_1(a)$ abhängigen bestimmten Integralien leicht angebbar sind.

Um auch für einen solchen Fall die Brauchbarkeit der verschiedenen, die Function Γ betreffenden Eigenschaften zu zeigen, legen wir uns folgendes bestimmte Integrale zur numerischen Ausmittelung vor:

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13} \log.x\,dx\ .$$

Nach Gleichung (41) Nr. 218 hat man, wenn x^3 statt x und $a = \frac{14}{3}$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13} \log.x\,dx = \frac{1}{9}\,\Gamma_1(\tfrac{14}{3}) = \frac{1}{9}\,\Gamma_1(1+\tfrac{2}{3}+3)\ ;$$

wird in der Gleichung (γ) Nr. 220 $m = 3$ gesetzt, so hat man:

$$\Gamma(a+3) = a(a+1)(a+2)\,\Gamma(a)\ ,$$

und wenn beiderseits logarithmisch differenzirt wird, ergiebt sich:

$$\frac{\Gamma_1(a+3)}{\Gamma(a+3)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}\ ;$$

setzt man hier $a = 1 + \frac{2}{3}$, wodurch:

$$\frac{\Gamma_1(1+\frac{2}{3}+3)}{\Gamma(1+\frac{2}{3}+3)} = 3\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{11}\right) + \frac{\Gamma_1(1+\frac{2}{3})}{\Gamma(1+\frac{2}{3})}$$

oder auch, wegen:

$$\Gamma(1+\tfrac{2}{3}+3) = \tfrac{5}{3}.\tfrac{8}{3}.\tfrac{11}{3}\ \Gamma(1+\tfrac{2}{3})\ ,$$

die Gleichung:

$$\Gamma_1(1+\tfrac{2}{3}+3) = \tfrac{61}{3}\,\Gamma(1+\tfrac{2}{3}) + \tfrac{5}{3}.\tfrac{8}{3}.\tfrac{11}{3}\ \Gamma_1(1+\tfrac{2}{3})$$

erhalten wird, daher hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\log.x\,dx = \Gamma(1+\tfrac{2}{3})\left\{\frac{61}{27} + \frac{5.8.11}{3^5}\,\frac{\Gamma_1(1+\frac{2}{3})}{\Gamma(1+\frac{2}{3})}\right\}\;;$$

ferner bietet die Gleichung (η) Nr. 221, wenn solche logarithmisch differenzirt wird, die Gleichung:

$$\frac{\Gamma_1(1+a)}{\Gamma(1+a)} - \frac{\Gamma_1(2-a)}{\Gamma(2-a)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{1-a} - \pi\,\frac{\mathrm{Cos.}\,a\pi}{\mathrm{Sin}\,a\pi}$$

dar, setzt man hier $a = \frac{2}{3}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\Gamma_1(1+\frac{2}{3})}{\Gamma(1+\frac{2}{3})} = -\,\tfrac{3}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\Gamma_1(1+\frac{1}{3})}{\Gamma(1+\frac{1}{3})}\,,$$

sonach geht die vorige Gleichung auch in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\log.x\,dx = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{3})}{3^5}\left\{-111 + 440\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 440\,\frac{\Gamma_1(1+\frac{1}{3})}{\Gamma(1+\frac{1}{3})}\right\}\;.$$

Rechnet man nun nach Gleichung (X), wenn daselbst $a = \frac{1}{3}$ angenommen wird, den Werth von

$$\frac{\Gamma_1(1+\frac{1}{3})}{\Gamma(1+\frac{1}{3})}\,,$$

so erhält man, wenn bis und mit dem Gliede a^{12} die Rechnung abgebrochen wird, folgende Bestimmung:

$$\frac{\Gamma_1(1+\frac{1}{3})}{\Gamma(1+\frac{1}{3})} = -\,0{,}13203378002\,,$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\log.x\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\frac{2}{3})}{3^5}\left\{-\,111 + 440\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 440\,.\,0{,}13203378002\right\}\;.$$

In der vorangehenden Nr. fanden wir aber

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\,dx = \tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{5}{3}\,.\,\tfrac{8}{3}\,.\,\tfrac{11}{3}\;\Gamma(1+\tfrac{2}{3})\,,$$

daher hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\log.x\,dx =$$

$$= \frac{1}{1320}\left\{-\,111 + 440\,.\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 440\,.\,0{,}13203378002\right\}\int_0^\infty e^{-x^3}\,x^{13}\,dx\,,$$

oder endlich:

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13} \log.x\,dx = 0,47649761898 \int_0^\infty e^{-x^3} x^{13}\,dx \;.$$

Wird noch das in der vorangehenden Nr., für das bestimmte Integrale zur Rechten, gefundene Resultat zu Grunde gelegt, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x^3} x^{13} \log.x\,dx = 2,336648 \;.$$

228. Wir schließen diesen Paragraph mit der Mittheilung eines bestimmten Integrals, das dem der Gleichung (45) ganz analog ist, und dessen Werth von der Function $\Gamma(a)$ sowohl, als von dem Differenzialquotienten dieser Function nach a abhängig sich herausstellt.

Indem wir im Wesentlichen ganz Legendre folgen, leiten wir diese Bestimmung folgendermaßen ein:

Durch einfache Differenziation gelangt man auf folgende Gleichheit:

$$d.\log.\frac{1-x^k}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k}\right)dx \;;$$

integrirt man hier, beiderseits, zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man, mit Zuziehung der Differenzialrechnung II Nr. 29, folgende Gleichung:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k}\right)dx = \log.k \;,$$

die für jeden positiven Werth, ja sogar noch für unendlich groß werdende und positive Werthe von k Bestand hat.

Legt man nun in dieser Gleichung der Größe k einen unendlich großwerdenden und positiven Werth bei, und verbindet dann dieselbe, durch Subtraction, mit der folgenden, aus Nr. 201 (S. 354) entlehnten Gleichung:

$$\int_0^1 \frac{x^k-1}{x-1}\,dx = \log.k - c \;,$$

welche gleichfalls für unendlich großwerdende und positive Werthe von k abgeleitet wurde, so erhält man:

$$\int_0^1 \left(\frac{kx^{k-1}}{1-x^k} - \frac{x^k}{1-x}\right)dx = -c \;,$$

wo der numerische Werth von c durch Gleichung (α') Nr. 225 gegeben ist.

Vertauscht man in dieser Gleichung x^k in x, so hat man:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{1-x} - \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k\left(1-x^{\frac{1}{k}}\right)} \right\} dx = -c .$$

oder auch:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{1-x} - \frac{\frac{1}{k}}{\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right]} \right\} dx = -c ;$$

man hat aber:

$$\text{Lim}: \frac{x^{\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k}} = \log.x ,$$

wo das Grenzzeichen auf das unendliche Zunehmen der positiven Zahl k Bezug hat, daher hat man auch die Gleichung:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{\log.\frac{1}{x}} \right) dx = -c , \qquad (51)$$

von der wir bei Herstellung des im Anfange dieser Nr. angekündigten bestimmten Integrals Gebrauch machen werden.

Dieses bestimmte Integrale ist ein besonderer Fall des folgenden:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x} \right) dx ,$$

wo a und b positive, reelle Größen vorstellen.

Behandelt man dieses Integrale nach der Methode des Zerlegens (Integralrechnung II, §. V Nr. 62), d. h., setzt man:

$$\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x} = \frac{x^{a-1}-1}{1-x} + \frac{x^{b-1}-1}{\log.x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log.x} ,$$

oder auch:

$$\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x} = \frac{x^{a-1}-1}{1-x} + \frac{x^{b-1}-1}{\log.x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{\log.\frac{1}{x}} ,$$

so hat man:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{x^{b-1}-1}{\log.x} dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{\log.\frac{1}{x}}\right) dx,$$

wo jedes der Integralien zur Rechten bereits bestimmt wurde.

Das erste dieser Integralien bietet die Gleichung (46) Nr. 219 dar, wenn dort $a = 1$ und $b = a$ gesetzt wird, wodurch:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{1-x} dx = \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}$$

erhalten wird; das zweite dieser Integralien wird aus der Gleichung (60) Nr. 159 gezogen, wenn dort $\beta = 1$ und $\alpha = b$ angenommen wird, und man erhält:

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}-1}{\log.x} dx = \log.b\ ;$$

das dritte dieser Integralien endlich ist oben durch Gleichung (51) bestimmt worden. Man erhält demnach durch Zusammenzählung dieser drei Ergebnisse:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x}\right) dx = -\frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} + \log.b + \frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} - c\ ;$$

wird aber in der Gleichung (X) der vorangehenden Nr. ω statt a gesetzt, wo ω eine unendlich kleinwerdende, reelle Größe bedeutet, so geht dieselbe zunächst in folgende:

$$\frac{\Gamma_1(1+\omega)}{\Gamma(1+\omega)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \pi \frac{\operatorname{Cos}.\pi\omega}{\operatorname{Sin}.\pi\omega}\right) + c$$

über, oder auch in:

$$\frac{\Gamma_1(1+\omega)}{\Gamma(1+\omega)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \pi \frac{1}{\pi\omega}\right) + c = c\ ,$$

oder endlich in:

$$\frac{\Gamma_1(1)}{\Gamma(1)} = c\ ,$$

daher hat man folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{x^{b-1}}{\log.x}\right) dx = \log.b - \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)}, \qquad (52)$$

die für alle positiv angebbaren und reellen Werthe von a und b stattfindet.

Die besondere Annahme $b = 1$, bietet die Gleichung:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log.\frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) dx = \frac{\Gamma_1(a)}{\Gamma(a)} \qquad (53)$$

dar, welche die anfangs dieser Nr. erwähnte analoge zur Gleichung (45) Nr. 219 ist.

---

§. III.

Allgemeines Verfahren die numerischen Werthe bestimmter Integralien näherungsweise zu ermitteln.

229. Die in der Integralrechnung I aufgestellten Gleichungen (6), (7), (9), (10) und (11), die den Zusammenhang eines Integralausdruckes mit einer Summe begründen, bieten, abgesehen von der theoretischen Wichtigkeit derselben, die sich an mehreren Orten geltend machte, auch die letzte Zuflucht bei numerischen, aber angenäherten Bestimmungen bestimmter Integralien dar. — Diese Gleichungen bestehen nur dann in vollster Strenge, wenn die in denselben vorkommenden Buchstaben:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n, \omega.$$

unendlich kleinwerdende Zahlengrößen repräsentiren, und sonach mit allen Attributen solcher Größen behaftet gedacht werden. Sollen aber diese Gleichungen bei numerischen Bestimmungen gebraucht werden, dann müssen diese eben angeführten Zahlengrößen zwar als kleine, immer jedoch als endliche Größen auftreten: dadurch hören diese Gleichungen zu bestehen auf, oder dieselben legen den Character von Gleichheiten ab und erfordern, beim jedesmaligen Gebrauche derselben, gewisser Correctionen oder Ergänzungen. Diese sind es nun, d. h., deren Herstellung und Beurtheilung, welche den Inhalt des vorliegenden Paragraphen ausmachen werden.

Unser nächstes Geschäft wird daher sein, die Correction einer der

oben citirten Gleichungen, unter der eben erwähnten Annahme, durch einen allgemeinen Ausdruck darzustellen; und nach geschehener Herstellung desselben werden wir erst zeigen, wie der jedesmal statthabende Fehler mittelst dieses Ausdruckes zu beurtheilen und zu corrigiren sei.

230. Legt man die Gleichung (11), Integralrechnung I Nr. 36 zu Grunde, nämlich die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \omega\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\,.\,.\,+\varphi(b-\omega)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\},$$

so besteht dieselbe, wie in der vorhergehenden Nr. erwähnt wurde, nur insofern, als unter ω eine unendlich kleinwerdende Größe gedacht wird; setzt man aber v statt ω, wo v einen endlichen oder angebbaren Zahlenwerth bedeutet, so wird man statt der letzten Gleichung folgende aufstellen müssen:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\,.\,.\,.\,.\right.$$

$$\left.+\,\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}+R\,, \qquad (A)$$

wo R die nunmehr nothwendige Correction vorstellt, mit deren Bestimmung wir uns nun zu befassen haben.

In Nr. 178, Gleichung 94 haben wir gefunden:

$$\int_0^{m\pi} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x}\,f(x)\,dx =$$

$$= \pi\left\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\,.\,.\,+f[(m-1)\pi]+\tfrac{1}{2}f(m\pi)\right\},$$

wo m irgend eine ganze, k eine ganze und unendliche großwerdende Zahl und f(x) eine von $x=0$ bis $x=m\pi$ continuirliche Function von x bedeutet.

Mit Hülfe dieser Gleichung gelangt man auch auf folgende:

$$\int_0^{m\pi} \frac{\text{Sin.}(2k+1)x}{\text{Sin.}x}\,f\left(\frac{vx}{\pi}\right)dx =$$

$$= \pi\left\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(v)+f(2v)+\,.\,.\,.\,+f[(m-1)v]+\tfrac{1}{2}f(mv)\right\},$$

wo v was immer für eine endliche Größe vorstellt; wird in dieser Gleichung

$$x \text{ in } \frac{\pi x}{v} \text{ und } f(x) \text{ in } \varphi(x)$$

umgesetzt, so hat man auch:

$$\int_0^{mv} \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(o) + \varphi(v) + \varphi(2v) + \ldots + \varphi[(m-1)v] + \tfrac{1}{2}\varphi(mv)\right\} .$$

Stellt μ ebenfalls eine ganze Zahl vor, so hat man auch:

$$\int_0^{\mu v} \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(v) + \varphi(2v) + \ldots + \varphi[(\mu-1)v] + \tfrac{1}{2}\varphi(\mu v)\right\} :$$

wird nun μ kleiner als m gedacht, so daß $m-\mu$ als positive, ganze Zahl auftritt, so ergiebt sich, durch Subtraction dieser zwei Gleichungen, folgende:

$$\int_{\mu v}^{mv} \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(\mu v) + \varphi[(\mu+1)v] + \varphi[(\mu+2)v] + \ldots + \varphi[(m-1)v] + \tfrac{1}{2}\varphi(mv)\right\} .$$

Wenn nun

$$\mu v = a \quad \text{und} \quad m v = b$$

angenommen wird, so geht die zuletzt aufgestellte Gleichung über in:

$$\int_a^b \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+v) + \varphi(a+2v) + \ldots + \varphi(b-v) + \tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\} ,$$

oder auch, wenn noch:

$$m - \mu = n, \quad \text{folglich} \quad b = a + nv$$

gesetzt wird, in:

$$\int_a^b \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} \varphi(x)\,dx =$$

$$= v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+v) + \varphi(a+2v) + \ldots + \varphi[a+(n-1)v] + \tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}.$$

Wird diese Gleichung, in der alle Buchstabengrößen dieselben Bedeutungen als in der obigen (A) haben, von dieser (A) subtrahirt, so ergiebt sich, zur Bestimmung der Correctionsgröße R, die Gleichung:

$$R = \int_a^b \left\{1 - \frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}}\right\} \varphi(x)\,dx\,, \qquad (B)$$

in der k eine unendlich großwerdende, ganze und positive Zahl vorstellt.

Aus dieser Gleichung kann man einen in mancher Beziehung complicirteren, jedoch zur numerischen Bestimmung der Größe R tauglicheren Formwerth dieser Größe auf folgendem Wege ableiten.

Für jeden ganzen und noch so großen Werth der Größe r hat man die Gleichung:

$$\frac{\text{Sin.}(2r+1)z - \text{Sin.}z}{2\,\text{Sin.}z} =$$

$$= \text{Cos.}2z + \text{Cos.}4z + \text{Cos.}6z + \text{Cos.}8z + \ldots + \text{Cos.}2rz\,;$$

wird hier r als unendlich großwerdende und ganze Zahl angesehen, und gleich k gesetzt, dann

$$\frac{\pi x}{v} \text{ statt } z$$

angenommen, so hat man:

$$\frac{\text{Sin.}(2k+1)\frac{\pi x}{v}}{\text{Sin.}\frac{\pi x}{v}} - 1 = 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \text{Cos.}\frac{2r\pi x}{v}\,,$$

wodurch der obige Werth von R in folgenden übergeht:

$$R = -2\sum_{r=1}^{r=\infty} \int_a^b \varphi(x)\,\text{Cos.}\frac{2r\pi x}{v}\,dx\,, \qquad (C)$$

wo das Summenzeichen über alle ganzen Zahlenwerthe von $r=1$ bis $r=\infty$ sich erstreckt.

Es geht sonach die oben aufgestellte Gleichung (A) über in:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}\frac{2r\pi x}{v}dx\ ,$$

oder wenn die Gleichheit:

$$\mathrm{Cos.}2r\pi\frac{x-a}{v} = \mathrm{Cos.}\frac{2r\pi x}{v}\,\mathrm{Cos.}\frac{2r\pi a}{v} + \mathrm{Sin.}\frac{2r\pi x}{v}\,\mathrm{Sin.}\frac{2r\pi a}{v}$$

beachtet wird, die, wenn zur Rechten vom Gleichheitszeichen

$$a = \mu v$$

gesetzt wird, wo μ eine ganze Zahl bedeutet, in folgende übergeht:

$$\mathrm{Cos.}2r\pi\frac{x-a}{v} = \mathrm{Cos.}\frac{2r\pi x}{v}\ ,$$

so nimmt die vorige Gleichung folgende Form an:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}2r\pi\frac{x-a}{v}dx\ . \qquad \text{(I)}$$

Von dieser Gleichung, die zuerst von Poisson mitgetheilt wurde, werden wir ausgehen, um die Correction abzuleiten, von der in der vorhergehenden Nr. die Rede war.

231. Legen wir uns zunächst das in dem Ergänzungsgliede der Gleichung (I) enthaltene bestimmte Integrale:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos.}2r\pi\frac{x-a}{v}dx\ ,$$

in welchem:

$$b-a = nv$$

ist, zur Reduction vor.

Durch theilweises Integriren, d. h., mit Beziehung der Gleichung (4) Nr. 38, erhält man, mit Beachtung des zuletzt aufgestellten Zusammenhanges zwischen nv und $b-a$ und mit Berücksichtigung, daß n und r ganze Zahlenwerthe bedeuten, die Reductionsgleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx = -\frac{v}{2r\pi}\int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{Sin}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,,$$

wo $\varphi_1(x)$ den Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x vorstellt; und da man durch dieselbe Behandlungsweise auch auf folgende Reductionsgleichung gelangt:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{Sin}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx =$$

$$= -\frac{v}{2r\pi}[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)] + \frac{v}{2r\pi}\int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,,$$

wo $\varphi_2(x)$ den Differenzialquotienten von $\varphi_1(x)$ nach x vorstellt, so hat man auch:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx =$$

$$= \frac{v^2}{(2\pi)^2r^2}[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)] - \frac{v^2}{(2\pi)^2r^2}\int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,.$$

Wird das bestimmte Integrale zur Rechten, nämlich:

$$\int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,,$$

auf dieselbe Weise, wie das in dieser Nr. vorgelegte behandelt, und wird das Ergebniß in die zuletzt aufgestellte Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx = \frac{v^2}{(2\pi)^2r^2}[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)]$$

$$- \frac{v^4}{(2\pi)^4r^4}[\varphi_3(b)-\varphi_3(a)]$$

$$+ \frac{v^4}{(2\pi)^4r^4}\int_a^b \varphi_4(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,.$$

Wenn in dieser Weise fortgefahren wird, erhält man allgemein:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx = \frac{v^2}{(2\pi)^2r^2}[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)]$$
$$-\frac{v^4}{(2\pi)^4r^4}[\varphi_3(b)-\varphi_3(a)]$$
$$+\frac{v^6}{(2\pi)^6r^6}[\varphi_5(b)-\varphi_5(a)]$$
$$-\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}v^{2m}}{(2\pi)^{2m}r^{2m}}[\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)]$$
$$+\frac{(-1)^m v^{2m}}{(2\pi)^{2m}r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,,$$

wo der rte Differenzialquotient von $\varphi(x)$ nach x durch $\varphi_r(x)$ angedeutet wurde.

Wird dieses Ergebniß in die Gleichung (I) vorangehender Nr. eingesetzt, so erhält man, mit Berücksichtigung der Bedeutung des dort vorkommenden Summenzeichens, folgende Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$-Y_2[\varphi_1(b)-\varphi_1(a)]v^2+Y_4[\varphi_3(b)-\varphi_3(a)]v^4$$
$$-Y_6[\varphi_5(b)-\varphi_5(a)]v^6+\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)]v^{2m}$$
$$+2(-1)^{m+1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\,,\quad\text{(II)}$$

in der abkürzend

$$Y_{2r}=\frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left(1+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\ldots\right)$$

gesetzt wurde.

Die der ersten Zeile dieser Gleichung (II) nachfolgenden Glieder geben die Correction an, falls man mit irgend einem endlichen Werthe von v die numerische Bestimmung dieser ersten Zeile vornimmt. Bricht man die Correctionsbestimmung mit dem Gliede ab, das den Factor Y_{2m} trägt, so bietet noch der auf der letzten Zeile dieser Gleichung befindliche Ausdruck Mittel dar, die Beschaffenheit des noch immer

statthabenden Fehlers zu erwägen. Bevor wir jedoch an die Untersuchung über die Beschaffenheit dieses Ausdruckes übergehen, wollen wir in der folgenden Nr. zuerst die Zahlenwerthe der Größen $Y_2, Y_4, Y_6, \ldots$ mittheilen.

232. Vergleicht man den Werth von Y_{2r} der vorangehenden Nr. mit dem von U_{2k}, wie solchen die erste der Gleichungen (δ) Nr. 180 darstellt, so erhält man folgenden Zusammenhang:

$$Y_{2r} = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}} U_{2r} ;$$

zieht man noch die Recursionsgleichungen (γ) Nr. 180, die zur Bestimmung von $U_2, U_4, U_6, \ldots$ dienen, zu Hülfe, so erhält man folgende Reihe von Recursionsgleichungen:

$$2^2 Y_2 = \frac{2}{1.2.3},$$

$$2^4 Y_4 - \frac{2^2}{1.2.3} Y_2 = \frac{-4}{1.2.3.4.5},$$

$$2^6 Y_6 - \frac{2^4}{1.2.3} Y_4 + \frac{2^2}{1.2.3.4.5} Y_2 = \frac{6}{1.2.3.4.5.6.7},$$

$$2^8 Y_8 - \frac{2^6}{1.2.3} Y_6 + \frac{2^4}{1.2.3.4.5} Y_4 - \frac{2^2}{1.2.3.4.5.6.7} Y_2 = \frac{-8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

u. s. w.,
aus denen

$$Y_2 = \frac{1}{12}, \quad Y_4 = \frac{1}{720}, \quad Y_6 = \frac{1}{30240}, \quad Y_8 = \frac{1}{1209600} \text{ u. s. w.}$$

gezogen wird.

Noch schneller gelangt man zur Kenntniß des numerischen Werthes von Y_{2r}, namentlich wenn r irgendwie die Einheit übertrifft, wenn man das in Nr. 225 zur numerischen Bestimmung von S_m (Gleichung (a)) Mitgetheilte berücksichtiget. Man erhält alsdann, wenn auch die Gleichung (d) derselben citirten Nr. berücksichtiget wird,

$$Y_{2r} = \frac{2}{(2\pi)^{2r}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2r}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2r}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2r}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2r}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha^{2r}}\right)},$$

wo die Zahlen:

$$2, 3, 5, 7, \ldots \alpha$$

sämmtliche Primzahlen von 2 bis ins Unendliche repräsentiren.

In Decimalbruchform fügen wir hier noch die Werthe dieser Größen bis auf die 16te Decimalstelle bei

$$Y_2 = 0{,}08333\ 33333\ 333333$$
$$Y_4 = 0{,}00138\ 88888\ 888889$$
$$Y_6 = 0{,}00003\ 30687\ 830688$$
$$Y_8 = 0{,}00000\ 08267\ 195767$$
$$Y_{10} = 0{,}00000\ 00208\ 767570$$
$$Y_{12} = 0{,}00000\ 00005\ 284190$$
$$Y_{14} = 0{,}00000\ 00000\ 133825$$
$$Y_{16} = 0{,}00000\ 00000\ 003390$$
$$Y_{18} = 0{,}00000\ 00000\ 000086$$
$$Y_{20} = 0{,}00000\ 00000\ 000002$$

welche Werthe in der Folge, bei numerischen Bestimmungen öfters zur Anwendung kommen werden.

233. Aus der schnellen Abnahme der Glieder der Reihe:

$$Y_2,\ Y_4,\ Y_6,\ Y_8,\ Y_{10},\ \ldots.$$

beim Zunehmen der Stellenzeiger, erlaubt man sich nur zu bald die Folgerung: es müsse die in der Gleichung (II) Nr. 231, der ersten Zeile nachfolgende Correctionsreihe, zumal dann, wenn v einen echtgebrochenen Zahlenwerth vorstellt, jedesmal die in Nr. 229 erwähnte Ergänzung darbieten. Dem ist aber nicht so, wenigstens in der Allgemeinheit nicht, wenn man den dieser Correctionsreihe nachfolgenden Ausdruck:

$$2(-1)^{m+1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx\ ,$$

den wir hier und im ganzen Verlaufe dieser Untersuchung durch R_m bezeichnen wollen, in Betracht zieht.

Fassen wir zu diesem Zwecke zuerst den Fall ins Auge, wenn die Function $\varphi_{2m}(x)$, für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$, Werthe mit gleichen Zeichen annimmt, so besteht, was die numerischen Werthe betrifft, folgende Ungleichheit:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}.2r\pi\frac{x-a}{v}\,dx < \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,dx\ ,$$

also auch, mit bloßer Beachtung der numerischen Werthe, folgende Ungleichheit:

$$R_m < 2\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2m}} \int_a^b \varphi_{2m}(x)\,dx\ ;$$

und wegen der Gleichung:

$$\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,dx = \varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)\ ,$$

erhält man, mit Zuziehung des in Nr. 231 festgestellten Werthes von Y_{2m}, die Ungleichheit:

$$R_m < Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]\,v^{2m}\ ,$$

welche folgendes Theorem begründet:

Legt man die Gleichung (II) der eben citirten Nr. bei der numerischen Bestimmung eines Integrals zum Grunde; wird $\varphi_{2m}(x)$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ beständig mit demselben Zeichen behaftet vorausgesetzt; und bricht man die Correctionsreihe mit dem Gliede:

$$(-1)^m\, Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]\,v^{2m}$$

ab, d. h. rechnet man den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

nach folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)dx = v\ &\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\}\\ &- Y_2\,[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)]\,v^2 + Y_4\,[\varphi_3(b) - \varphi_3(a)]\,v^4\\ &- Y_6\,[\varphi_5(b) - \varphi_5(a)]\,v^6 + \ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots + (-1)^m\, Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]\,v^{2m}\ ,\quad (a)\end{aligned}$$

wo $b-a=nv$ ist, so ist der hierbei zu befürchtende Fehler numerisch kleiner als das letzte Glied dieser Gleichung (a).

Beim Stattbaben dieses Falles ist es nicht schwer das Increment v der Art zu bestimmen, daß das in Rede stehende Integrale, nach der letzten Gleichung gerechnet, einen Werth darbiete, der von dem wahren oder fehlerfreien Werthe desselben nur noch um eine bestimmte Größe, z. B. um ε_m differire. Man setze zu diesem Behufe:

$$\varepsilon_m = Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]\, v^{2m},$$

und rechne aus dieser Gleichung den Werth von v; substituirt man diesen Werth von v in die Gleichung (a), so ist der numerische Werth des letzten Gliedes derselben gleich ε_m, folglich ist, nach dem vorangeschickten Theoreme, der auf diesem Wege noch mögliche Fehler numerisch kleiner als ε_m.

Findet aber die Bedingung, $\varphi_{2m}(x)$ habe von $x = a$ bis $x = b$ beständig dasselbe Zeichen, nicht Statt, dann sind auch sämmtliche, oben aufgestellte Ungleichheiten unzulässlich, daher auch die aus denselben gezogene Folgerung, betreffend die Größe des Fehlers unstatthaft.

Bevor wir uns jedoch an die Erörterung dieses Falles machen, wollen wir in der folgenden Nr., nach der Gleichung (a), einen speciellen Fall behandeln, bei dem die geforderte Bedingung, die Function $\varphi_{2m}(x)$ betreffend, realisirt erscheint.

234. Folgendes bestimmte Integrale:

$$\int_a^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

wo $a > 0$ ist, eignet sich sehr gut zu diesem Zwecke.

Man hat hier:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x},$$

$$\varphi_1(x) = -(x+1)\frac{e^{-x}}{x^2},$$

$$\varphi_2(x) = (x^2+2x+2)\frac{e^{-x}}{x^3},$$

$$\varphi_3(x) = -(x^3+3x^2+3.2x+3.2.1)\frac{e^{-x}}{x^4},$$

$$\varphi_4(x) = (x^4+4x^3+4.3x^2+4.3.2x+4.3.2.1)\frac{e^{-x}}{x^5},$$

. . . .

$$\varphi_k(x) = (-1)^k[x^k+kx^{k-1}+k(k-1)x^{k-2}+\ldots+k(k-1)(k-2)\ldots 2.1]\frac{e^{-x}}{x^{k+1}}.$$

Aus den positiven Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x, innerhalb der Klammern der letzten Gleichung nimmt man, wie aus der Lehre der Gleichungen bekannt ist, ab, daß dieser Ausdruck oder

die innerhalb der Klammern enthaltene Function von x für keinen positiven Werth von x verschwinden kann; ferner nimmt man aus der letzten Gleichung ab, daß die Function $\varphi_k(x)$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=\infty$ continuirlich sei: dadurch gelangen wir zur Folgerung, daß $\varphi_k(x)$ und mithin auch $\varphi_{2m}(x)$, von $x=a$ bis $x=\infty$ keine Zeichenänderung erleiden kann, und daß letztere, nämlich $\varphi_{2m}(x)$, für alle diese Werthe von x beständig das positive Zeichen trägt.

Wendet man sonach die Gleichung (a) vorangehender Nr. auf das vorgelegte bestimmte Integrale an, so hat man:

$$\int_a^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = v\left\{\frac{1}{2}\,\frac{e^{-a}}{a} + \frac{e^{-(a+v)}}{a+v} + \frac{e^{-(a+2v)}}{a+2v} + \frac{e^{-(a+3v)}}{a+3v} + \text{in inf.}\right\}$$

$$- Y_2(a+1)\frac{e^{-a}}{a^2}v^2 + Y_4(a^3+3a^2+3.2a+3.2.1)\frac{e^{-a}}{a^4}v^4 - \ldots$$

$$+ (-1)^m Y_{2m}[a^{2m-1}+(2m-1)a^{2m-2}+(2m-1)(2m-2)a^{2m-3}+ \ldots$$

$$\ldots + (2m-1)(2m-2)\ldots 2.1]\frac{e^{-a}}{a^{2m}}v^{2m}. \quad (\alpha)$$

Ohne das in der vorangehenden Nr., über die Bestimmung von v Mitgetheilte pünktlich befolgen zu müssen, gelangt man im vorliegenden Falle, auf einem weniger beschwerlichen Wege, zu einem nicht minder genauen Resultate. Man hat nämlich, nach der vorangehenden Nr., wenn bei Feststellung der letzten Gleichung der numerische Werth des Fehlers durch R_m angedeutet wird, die Ungleichheit:

$$R_m < 1.2.3\ldots(2m-1)Y_{2m}\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\ldots+\frac{a^{2m-1}}{1.2.3\ldots(2m-1)}\right)\frac{e^{-a}}{a^{2m}}v^{2m};$$

nun ist:

$$e^a > 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\ldots+\frac{a^{2m-1}}{1.2.3\ldots(2m-1)},$$

daher hat man auch um so mehr:

$$R_m < 1.2.3\ldots(2m-1)Y_{2m}\left(\frac{v}{a}\right)^{2m};$$

wird daher:

$$\varepsilon_m = 1.2.3 \ldots (2m-1)\, Y_{2m} \left(\frac{v}{a}\right)^{2m} \qquad (\beta)$$

angenommen, so hat man:

$$R_m < \varepsilon_m ,$$

d. h., wenn, bei irgend einer Annahme über ε_m, aus dieser Gleichung (β) der Werth von $\frac{v}{a}$ ermittelt und in die Gleichung (α) eingesetzt wird, so ist der hierbei begangene Fehler numerisch kleiner als ε_m, falls man in dieser Gleichung (α) mit dem den Factor Y_{2m} tragenden Gliede die Rechnung abbricht.

Nimmt man z. B.

$$\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$$

an, so findet man:

$$\text{für } m = 1, \quad \frac{v}{a} = 0{,}0010954 ,$$

$$\text{„} \ m = 2, \quad \frac{v}{a} = 0{,}0588566 ,$$

$$\text{„} \ m = 3, \quad \frac{v}{a} = 0{,}1712248 ,$$

$$\text{„} \ m = 4, \quad \frac{v}{a} = 0{,}2645613 ;$$

erklären wir uns für den letzten Werth von $\frac{v}{a}$, so besteht die Gleichung:

$$\int_a^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = v e^{-a}\left(\frac{1}{2a} + \frac{e^{-v}}{a+v} + \frac{e^{-2v}}{a+2v} + \frac{e^{-3v}}{a+3v} + \text{in inf.}\right)$$

$$- Y_2 (a+1)\, e^{-a}\left(\frac{v}{a}\right)^2 + Y_4 (a^3+3a^2+6a+6)\, e^{-a}\left(\frac{v}{a}\right)^4$$

$$- Y_6 (a^5+5a^4+20a^3+60a^2+120a+120)\, e^{-a}\left(\frac{v}{a}\right)^6$$

$$+ Y_8 (a^7+7a^6+42a^5+210a^4+840a^3+2520a^2+5040a+5040)\, e^{-a}\left(\frac{v}{a}\right)^8 ,$$

mit einer Genauigkeit, die sich noch auf die siebente Decimalstelle erstreckt.

Da der Genauigkeitsgrad nur erhöhet wird, je kleiner man das

Increment v annimmt, so erklären wir uns, um Erleichterung in der numerischen Bestimmung zu erzwecken, für die Annahme $\frac{v}{a}=\frac{1}{4}$, und wenn mit dieser Annahme nach der aufgestellten Gleichung das fragliche Integrale ermittelt wird, so muß sich dasselbe, wenigstens noch in der siebenten Decimalstelle, als genau bestimmt herausstellen.

Der ganz specielle Fall $a=1$ bietet folgende Gleichung dar:

$$\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{4e}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}}+\frac{e^{-\frac{2}{4}}}{1+\frac{2}{4}}+\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1+\frac{3}{4}}+\frac{e^{-\frac{4}{4}}}{1+\frac{4}{4}}+\frac{e^{-\frac{5}{4}}}{1+\frac{5}{4}}+\text{in inf.}\right)$$

$$-\frac{2}{e}\,Y_2\,(\tfrac{1}{4})^2+\frac{16}{e}\,Y_4\,(\tfrac{1}{4})^4-\frac{326}{e}(\tfrac{1}{4})^6+\frac{13700}{e}(\tfrac{1}{4})^8\;;$$

die erste Zeile rechts vom Gleichheitszeichen bietet, wenn von den innerhalb der Klammern enthaltenen Gliedern die 50 ersten numerisch bestimmt werden, das Ergebniß:

0,2231850

dar, welches schon in der zweiten Decimalstelle von dem abweicht, das die Gleichung (17) Nr. 201 für dasselbe Integrale darbieten wird; werden aber auch die auf die erste Zeile folgenden vier Correctionsglieder numerisch bestimmt, so ergiebt sich:

$$\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}=0{,}2231850-0{,}0038018=0{,}2193832\;,$$

und dieses Resultat weicht erst in der siebenten Decimalstelle von dem wahren Werthe des Integrals ab, welche Abweichung jedoch nur von der zu Grunde gelegten Logarithmentafel herrühren kann.

235. Wir wenden uns nunmehr dem Falle zu, wenn die in der Gleichung (II) Nr. 231, im Schlußgliede vorkommende Function $\varphi_{2m}(x)$, beim Uebergange von $x=a$ bis $x=b$ ein oder mehre Male den Zeichenzustand ändert.

Wir eröffnen die Untersuchungen mit besonderer Heraushebung der diesen Fall begleitenden Nebenumstände.

Die Gleichung (I) Nr. 230 konnten wir nur unter der Beschränkung gewinnen, daß die Function $\varphi(x)$, von $x=a$ bis $x=b$ beständig

continuirlich verbleibt, oder für keinen dieser Werthe der allgemeinen Größe unendlich groß wird; eben so konnten wir den Uebergang von der Gleichung (I) zur Gleichung (II) nur unter den Voraussetzungen bewerkstelligen, daß wir die abgeleiteten Functionen von $\varphi(x)$, nämlich:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots\ \varphi_{2m}(x)\ ,$$

innerhalb derselben Grenzwerthe von x continuirlich voraussetzten, sonach sehen wir uns, berücksichtigend den Umstand, daß $\varphi_{2m}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ Zeichenänderungen eingeht, zur Annahme gedrungen: unter den von $x=a$ bis $x=b$ vorkommenden Zahlenwerthen giebt es einen oder mehrere, die die Function $\varphi_{2m}(x)$ auf Null bringen, oder als Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi_{2m}(x)=0 \qquad (\alpha)$$

auftreten.

Von dieser Folgerung gehen wir nun aus, diesen Fall zu untersuchen und die Vorschriften zu entwickeln, nach denen in vorkommenden Fällen dieser Art eine näherungsweise Integration zu bewerkstelligen sei.

Die Integrationsgrenzen a und b haben wir, bis jetzt wenigstens, als reelle Größen auftreten lassen, daher haben wir es auch nur mit jenen, innerhalb a und b fallenden Wurzeln der Gleichung (α) zu thun, die ebenfalls reell sind und Veränderungen im Zeichenzustande von $\varphi_{2m}(x)$ bewirken. Stellt man diese Wurzeln, der Größe nach geordnet, durch:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_k$$

dar, wo die Unterschiede:

$$\alpha_1-a,\ \alpha_2-\alpha_1,\ \alpha_3-\alpha_2,\ \ldots\ \alpha_k-\alpha_{k-1},\ b-\alpha_k\ ,$$

sämmtlich, positive und reelle Werthe darbieten, so wird jede derselben, z. B. die dem Zeiger g entsprechende, nämlich α_g der Art sein, daß die Werthe der zwei folgenden Ausdrücke:

$$\varphi_{2m}(\alpha_g-\omega) \text{ und } \varphi_{2m}(\alpha_g+\omega)$$

entgegengesetzte Zeichen tragen, die Größe ω mag noch so klein gedacht sein.

Da, nach dem so eben Festgestellten, die Function $\varphi_{2m}(x)$ für alle Werthe von $x=\alpha_g$ bis $x=\alpha_{g+1}$ dasselbe Zeichen trägt, so zerlege man das zwischen a und b zu vollziehende bestimmte Integrale in eine Summe von Integralien, deren jedes zwei der Zahlen:

$$a,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k,\ b, \qquad (\beta)$$

die der Größe nach auf einander folgen, als Grenzwerthe hat: dadurch wird zunächst erzweckt, daß auf jedes dieser Partialintegralien die Gleichung (a) Nr. 233, wie das daselbst aufgestellte Theorem ohne weiters Anwendung findet. Die in derselben citirten Nr. gegebene Vorschrift, das einem bestimmten Genauigkeitsgrad entsprechende Increment v zu ermitteln, wird dann auf jedes dieser Integralien eigens zur Anwendung gebracht werden müssen; und da jedes dieser Partialintegralien mit dem gleichen Genauigkeitsgrad ermittelt sein muß, so bleiben uns, diesen Zweck zu erreichen, zwei Wege offen. Der erste wäre: bei jedem dieser Partialintegralien dasselbe Increment v zu Grunde zu legen, alsdann aber wird, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, die Gliederzahl der Correctionsreihe nicht überall dieselbe sein; der zweite Weg wäre: bei allen Partialintegralien dieselbe Gliederzahl dieser Correctionsreihe in Anspruch zu nehmen, dafür aber jedes derselben mit einem eignen Incremente zu bestimmen.

Den zuletzt bezeichneten Weg schlagen wir nun ein. Wir werden denselben zuerst im Allgemeinen mittheilen, hierauf die besonders wichtigen Momente desselben beleuchten und erörtern und zum Beschlusse einige besondere Fälle nach demselben behandeln.

236. Mit Zugrundelegung des in der vorangehenden Nr. Mitgetheilten, namentlich der Bedeutung der in (β) vorkommenden Buchstabengrößen, hat man zuerst folgende Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha_k}^{b} \varphi(x)\,dx\,;$$

bezeichnet man die Incremente, mit denen die Integralien zur Rechten gerechnet werden sollen, in derselben Ordnung, wie diese Integralien auf einander folgen, durch:

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ v_k\,,$$

und setzt man folgende Gleichungen fest:

$$n_0 v_0 = \alpha_1 - a,\ n_1 v_1 = \alpha_2 - \alpha_1,\ n_2 v_2 = \alpha_3 - \alpha_2,\ \ldots\ n_k v_k = b - \alpha_k\,,$$

wo $n_0, n_1, n_2, \ldots n_k$ ganze und positive Zahlenwerthe vorstellen, so hat man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\int_a^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx =$$
$$= v_0 \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+v_0) + \varphi(a+2v_0) + \ldots \ldots \ldots + \varphi[a+(n_0-1)v_0] + \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha_1) \right\}$$
$$- Y_2[\varphi_1(\alpha_1) - \varphi_1(a)]v_0^2 + Y_4[\varphi_3(\alpha_1) - \varphi_3(a)]v_0^4$$
$$- Y_6[\varphi_5(\alpha_1) - \varphi_5(a)]v_0^6 + \ldots + (-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(\alpha_1) - \varphi_{2m-1}(a)]v_0^{2m},$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx =$$
$$= v_1 \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_1+v_1) + \varphi(\alpha_1+2v_1) + \ldots \ldots \ldots + \varphi[\alpha_1+(n_1-1)v_1] + \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha_2) \right\}$$
$$- Y_2[\varphi_1(\alpha_2) - \varphi_1(\alpha_1)]v_1^2 + Y_4[\varphi_3(\alpha_2) - \varphi_3(\alpha_1)]v_1^4 \qquad (\gamma)$$
$$- Y_6[\varphi_5(\alpha_2) - \varphi_5(\alpha_1)]v_1^6 + \ldots + (-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)]v_1^{2m},$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\int_{\alpha_k}^{b} \varphi(x)\,dx =$$
$$= v_k \left\{ \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha_k) + \varphi(\alpha_k+v_k) + \varphi(\alpha_k+2v_k) + \ldots \ldots \ldots + \varphi[\alpha_k+(n_k-1)v_k] + \tfrac{1}{2}\varphi(b) \right\}$$
$$- Y_2[\varphi_1(b) - \varphi_1(\alpha_k)]v_k^2 + Y_4[\varphi_3(b) - \varphi_3(\alpha_k)]v_k^4$$
$$- Y_6[\varphi_5(b) - \varphi_5(\alpha_k)]v_k^6 + \ldots \pm (-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(\alpha_k)]v_k^{2m}.$$

Bestimmt man die hier zu Grunde gelegten Incremente v_0, v_1, v_2, ... v_k durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(\alpha_1) - \varphi_{2m-1}(a)]\,v_0^{2m} &= \pm\,\varepsilon_m\,,\\
Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)]\,v_1^{2m} &= \mp\,\varepsilon_m\,,\\
Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(\alpha_3) - \varphi_{2m-1}(\alpha_2)]\,v_2^{2m} &= \pm\,\varepsilon_m\,,\\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(\alpha_k) - \varphi_{2m-1}(\alpha_{k-1})]\,v_{k-1}^{2m} &= \pm\,(-1)^{k-1}\varepsilon_m\,,\\
Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(\alpha_k)]\,v_k^{2m} &= \pm\,(-1)^{k}\varepsilon_m\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

in denen, mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_1) - \varphi_{2m-1}(a) = \int_a^{\alpha_1} \varphi_{2m}(x)\,dx\,,$$

wie des Umstandes, daß die Incremente reell sein müssen, die oberen oder unteren Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die Function $\varphi_{2m}(x)$ von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ positiv oder negativ ist, so werden die obigen Gleichungen (γ), und zwar jede derselben, die betreffenden bestimmten Integralien mit einem gemeinschaftlichen Genauigkeitsgrad bestimmen, von der Beschaffenheit, daß bei jedem derselben nur noch ein Fehler denkbar ist, der kleiner als die positiv angenommene Größe ε_m ist.

237. Aus den Gleichungen (δ) vorangehender Nr., deren Anzahl $k+1$ ist, kann man eine, von den Wurzeln:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_k$$

unabhängige Gleichung ableiten, die wir der Vollständigkeit wegen ebenfalls noch aufnehmen.

Dividirt man diese Gleichungen in derselben Ordnung, wie sie aufeinander folgen, durch:

$$v_0^{2m},\ v_1^{2m},\ v_2^{2m},\ \ldots\ v_{k-1}^{2m},\ v_k^{2m}\,,$$

und nimmt dann ihre Summe, so stellt sich diese angekündigte Gleichung, wie folgt dar:

$$Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)] =$$

$$= \pm\,\varepsilon_m \left\{ \frac{1}{v_0^{2m}} - \frac{1}{v_1^{2m}} + \frac{1}{v_2^{2m}} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{v_{k-1}^{2m}} + \frac{(-1)^k}{v_k^{2m}} \right\}.$$

Der nicht selten vorkommende Fall, wenn man:

$$\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a) = 0$$

hat, bietet folgende, noch einfachere Relation dar:

$$\frac{1}{v_0^{2m}} - \frac{1}{v_1^{2m}} + \frac{1}{v_2^{2m}} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{v_{k-1}^{2m}} + \frac{(-1)^k}{v_k^{2m}} = 0\,;$$

für $k=1$ giebt diese Gleichung:

$$v_0 = v_1\,,$$

in diesem besonderen Fall wird die zu vollziehende Integration des vorgelegten Integrals, von $x=a$ bis $x=b$ mit einem einzigen Incremente bewerkstelliget; die Annahme $k=2$ bietet folgenden Zusammenhang dar:

$$\frac{1}{v_1^{2m}} = \frac{1}{v_0^{2m}} + \frac{1}{v_2^{2m}},$$

aus dem gefolgert werden kann, daß alsdann das mittlere Increment v_1, oder jenes, mit welchem das bestimmte Integrale:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx$$

zu ermitteln ist, kleiner als die beiden andern, v_0 und v_2 sein muß.

238. Das in Nr. 235 Mitgetheilte führt der Fall, $\varphi_{2m}(x)$ gehe von $x=a$ bis $x=b$ Abwechselungen im Zeichenzustande ein, auf mehrere Partialintegralien zurück, bei denen dieses nicht mehr stattfindet, wodurch auf jedes derselben das in Nr. 233 gewonnene Theorem ungeschmälert angewendet werden darf. Obschon nun, in theoretischer Beziehung, der Gegenstand als zur Genüge erörtert angesehen werden dürfte, bleibt doch, was die Ausübung dieses Integrationsverfahrens betrifft, wenn auch vom beschwerdevollen Geschäfte der numerischen Bestimmungen abgesehen wird, in der Mehrzahl vorkommender Fälle ein Umstand in Betracht zu ziehen übrig, der eine Abweichung vom allgemeinen Verfahren nothwendig macht. Wenn nämlich die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_k$ der Gleichung $\varphi_{2m}(x)=0$ incommensurabler Beschaffenheit sind, so sind dieselben, wie bekannt, nur angenähert angebbar; alsdann aber kann und wird nur zu oft der Uebelstand eintreten, daß der Werth des einen der oben bezeichneten Partialintegralien in die benachbarten zwei Partialintegralien, und umgekehrt, eingreifen oder überströmen wird: wodurch nach vollzogener Summation aller Partialintegralien ein fehlerhaftes Ergebniß hervorgehen muß.

Diesem Uebelstande kann nur durch ein Abweichen vom allgemeinen Verfahren abgeholfen werden, das sich auf folgende, für sich einleuchtende Bemerkung stützt.

Wenn irgend ein Integrale, mit einem bestimmten Incremente nach Gleichung (a) Nr. 233 gerechnet, einem gewissen Genauigkeitsgrad entspricht, so wird dieser Genauigkeitsgrad nur erhöhet, wenn unter übrigens gleichen Umständen, das Increment numerisch kleiner angenommen wird. — Stellt man daher durch v die kleinste unter den, aus den Gleichungen (δ) Nr. 236 gefolgerten Größen v_0, v_1, $v_2, \ldots v_k$ vor, oder wird für v eine noch kleinere Zahlengröße ange-

nommen, und setzt man dieselbe in die Gleichungen (γ) derselben Nr. statt der dort vorkommenden Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_k$, so wird jedes dieser Integralien mit einer Genauigkeit bestimmt erscheinen, dergestalt, daß der Werth des Fehlers bei jedem derselben numerisch kleiner als ε_m ist.

Nimmt man sonach, unter dieser Annahme, die Summe aller in (γ) aufgeführten Integralien, und setzt die Gleichung:

$$n v = b - a$$

fest, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$
$$- Y_2\,[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)]\,v^2 + Y_4\,[\varphi_3(b) - \varphi_3(a)]\,v^4$$
$$- Y_6\,[\varphi_5(b) - \varphi_5(a)]\,v^6 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^m Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]\,v^{2m}, \quad (a^1)$$

welche mit der Gleichung (a) Nr. 233 der Form nach identisch, dem Wesen nach aber in Folgendem von derselben abweicht. Während in der Gleichung (a) das Increment v willkührlich und der Fehler des nach derselben bestimmten Integralwerthes numerisch kleiner als das letzte Glied dieser Gleichung ist, stellt in der Gleichung (a^1) das Increment v den Minimumwerth oder eine numerisch noch kleinere Zahlengröße als den aus den Gleichungen (δ) gefolgerten Minimumwerth der Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_k$ vor, und die Größe des hierbei noch möglichen Fehlers ist numerisch kleiner als die in denselben Gleichungen (δ) enthaltene Größe ε_m.

Bedenkt man ferner die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,dx = \varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a),$$

so ist unter der Annahme, die Function $\varphi_{2m}(x)$ ändere von $x=a$ bis $x=b$ ein oder mehrere Male den Zeichenzustand, der Fall denkbar, daß man:

$$\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a) = 0$$

habe; ja mit dieser Gleichung können auch noch die folgenden zugleich bestehen:

$$\varphi_{2m-3}(b) - \varphi_{2m-3}(a) = 0, \quad \varphi_{2m-5}(b) - \varphi_{2m-5}(a) = 0, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \varphi_1(b) - \varphi_1(a) = 0;$$

finden nun alle diese Gleichungen Statt, so geht die obige Gleichung (a¹) in folgende über:

$$\int_a^b \varphi(x)dx =$$

$$v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}\ , \quad (a_1^1)$$

von der ein Gleiches, was von der Gleichung (a¹) ausgesagt werden kann.

239. Nach dem eben Mitgetheiten handelt es sich um die Ausmittelung des kleinsten der Incremente v_0, v_1, v_2, ... v_k der Gleichungen (δ), zu welchem Zwecke die Kenntniß dieser sämmtlichen Größen nöthig ist; da ferner die Bestimmung dieser Größen eine genaue Kenntniß der Wurzeln α_1, α_2, α_3, . . . α_k voraussetzt, diese Wurzeln aber im Allgemeinen nur angenähert gegeben werden können, so erachten wir es für zweckdienlich zuerst den Einfluß zu untersuchen, den fehlerhafte Annahmen der Wurzelwerthe auf diese Incrementenwerthe und namentlich auf den Minimumwerth derselben ausüben.

Eine bedeutende Erleichterung und Vereinfachung dieser Untersuchung gewährt die Aehnlichkeit, die die Gleichungen (δ) unter einander haben, welche bei dieser Untersuchung zu Grunde gelegt werden. Gehen wir sonach von der zweiten dieser Gleichungen aus, nämlich von der Gleichung:

$$Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)]\ v_1^{2m} = \mp\ \varepsilon_m\ ,$$

und stellen die angenäherten Werthe von α_2 und α_1 durch a_2 und a_1, wie den denselben entsprechenden Werth von v_1 durch u_1 vor, so hat man auch die Gleichung:

$$Y_{2m}\,[\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)]\ u_1^{2m} = \mp\ \varepsilon_m\ ;$$

setzt man hier:

$$a_2 = \alpha_2 \pm h_2\ , \quad a_1 = \alpha_1 \pm h_1\ ,$$

wo h_2 und h_1 die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln α_2 und α_1 vorstellen, so hat man, mit Zuziehung der Taylor'schen Reihe, wenn die dritten und höhern Potenzen dieser Fehler vernachlässiget und die Gleichungen:

$$\varphi_{2m}(\alpha_2) = 0\,, \qquad \varphi_{2m}(\alpha_1) = 0$$

berücksichtiget werden, statt derselben folgende Gleichung:

$$Y_{2m}\left\{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1) + \tfrac{1}{2}h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2) - \tfrac{1}{2}h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\right\} u_1^{2m} = \mp \varepsilon_n,$$

die auch, wie folgt, gestellt werden kann:

$$Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)]\left\{1 + \tfrac{1}{2}\frac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2) - h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)}\right\} u_1^{2m} = \mp \varepsilon_n,$$

aus der, mit Zuziehung der hier zum Grunde gelegten Gleichung, die folgende gezogen wird:

$$\left(\frac{u_1}{v_1}\right)^{2m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\,\dfrac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2) - h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)}}\,.$$

Die unbestimmten, immer aber innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ enthaltenen Zahlenwerthe der Größen h_2 und h_1 gestatten die Annahme: es sei der im Nenner der letzten Gleichung vorkommende Bruch numerisch kleiner als die Einheit, d. h. man habe die Ungleichheit:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2) - h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)} < \pm 1\,;$$

wird nun diese Ungleichheit festgestellt, so kann man, bei Vernachlässigung der vierten und höhern Potenzen von h_2 und h_1, aus der letzten Gleichung die folgende ziehen:

$$u_1 = v_1\left\{1 - \frac{1}{4m}\cdot\frac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2) - h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1)}\right\},$$

die den Zusammenhang des Incrementes v_1 mit dessen angenäherten Werthe u_1 darstellt.

Stellen wir nun durch:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_k$$

die angenäherten Werthe von:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ \alpha_k$$

vor, und setzen:

$$a_1 = \alpha_1 \pm h_1,\ a_2 = \alpha_2 \pm h_2,\ a_3 = \alpha_3 \pm h_3,\ \ldots\ a_k = \alpha_k \pm h_k,$$

so stellen:

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ \ldots\ h_k$$

die numerischen Werthe der Fehler der Wurzeln

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \ldots\ \alpha_k$$

dar; stellt man ferner durch

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_k$$

die angenäherten Werthe von

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_k$$

vor, so hat man, unter Voraussetzung der Ungleichheiten:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\frac{h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_1)-\varphi_{2m-1}(a)}<\pm 1,\\
&\pm\frac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)-h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2)-\varphi_{2m-1}(\alpha_1)}<\pm 1,\\
&\pm\frac{h_3^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_3)-h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_3)-\varphi_{2m-1}(\alpha_2)}<\pm 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm\frac{h_k^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)-h_{k-1}^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_{k-1})}{\varphi_{2m-1}(\alpha_k)-\varphi_{2m-1}(\alpha_{k-1})}<\pm 1,\\
&\pm\frac{-h_k^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)}{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(\alpha_k)}<\pm 1
\end{aligned}\right\}\quad(\varepsilon)$$

und bei Vernachlässigung der höhern Potenzen als die zweiten von $h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots\ h_k$, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
u_0-v_0&=-\frac{v_0}{4m}\cdot\frac{h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_1)-\varphi_{2m-1}(a)},\\
u_1-v_1&=-\frac{v_1}{4m}\cdot\frac{h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)-h_1^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_2)-\varphi_{2m-1}(\alpha_1)},\\
u_2-v_2&=-\frac{v_2}{4m}\cdot\frac{h_3^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_3)-h_2^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_3)-\varphi_{2m-1}(\alpha_2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{k-1}-v_{k-1}&=-\frac{v_{k-1}}{4m}\cdot\frac{h_k^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)-h_{k-1}^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_{k-1})}{\varphi_{2m-1}(\alpha_k)-\varphi_{2m-1}(\alpha_{k-1})},\\
u_k-v_k&=-\frac{v_k}{4m}\cdot\frac{-h_k^2\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)}{\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(\alpha_k)},
\end{aligned}\right\}\quad(\zeta)$$

die uns über den Genauigkeitsgrad der angenäherten Bestimmungen der Incremente, wie der Verfolg zeigen wird, genügenden Aufschluß geben.

Daß die Unterschiede:

$$u_0 - v_0,\ u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ \ldots\ u_{k-1} - v_{k-1},\ u_k - v_k,$$

im Vergleiche mit den zu bestimmenden Incrementen v_0, v_1, v_2, .. v_{k-1}, v_k äußerst klein sind, folgt aus diesen Gleichungen in Verbindung mit den denselben vorangehenden Ungleichheiten; deutlicher wird aber die Einsicht in die Beschaffenheit dieser Unterschiede, wenn wir erst den in der folgenden Nr. zu begründenden Satz vorgeführt haben werden.

240. Sämmtliche Unterschiede

$$u_0 - v_0,\ u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ \ldots\ u_{k-1} - v_{k-1},\ u_k - v_k$$

der Gleichungen (ζ) vorangehender Nr. haben positive Werthe.

Wir begründen diesen Satz folgendermaßen.

Da die Function $\varphi_{2m}(x)$, unter der gegenwärtigen Annahme, beim Uebergange von $x=a$ bis $x=b$ Zeichenänderungen eingeht, so setzen wir voraus: diese Functionen haben von $x=a$ bis $x=\alpha_1$ positive, von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ negative, von $x=\alpha_2$ bis $x=\alpha_3$ positive Werthe u. s. w., alsdann hat dieselbe Function von $x=\alpha_{k-1}$ bis $x=\alpha_k$ Werthe, die dem Zeichen von $(-1)^{k-1}$ und von $x=\alpha_k$ bis $x=b$ Werthe, die dem Zeichen von $(-1)^k$ entsprechen. Diese oder die genau entgegengesetzte Annahme muß Statt haben. Lassen wir vor der Hand die entgegengesetzte Annahme unbeachtet und berücksichtigen die folgenden Gleichungen:

$\varphi_{2m}(\alpha_1-\omega) = -\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_1)$,	$\varphi_{2m}(\alpha_1+\omega) = +\omega\,\varphi_{2m+1}'(\alpha_1)$,
$\varphi_{2m}(\alpha_2-\omega) = -\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)$,	$\varphi_{2m}(\alpha_2+\omega) = +\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_2)$,
$\varphi_{2m}(\alpha_3-\omega) = -\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_3)$,	$\varphi_{2m}(\alpha_3+\omega) = +\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_3)$,
. . . .	. . . .
$\varphi_{2m}(\alpha_k-\omega) = -\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)$,	$\varphi_{2m}(\alpha_k+\omega) = +\omega\,\varphi_{2m+1}(\alpha_k)$,

wo ω eine unendlich kleinwerdende Größe vorstellt, so stellt sich, wenn noch überdieß die unendlich kleinwerdende Größe ω, als positiv angesehen wird, für $\varphi_{2m+1}(\alpha_1)$ ein negatives, für $\varphi_{2m+1}(\alpha_2)$ ein positives, für $\varphi_{2m+1}(\alpha_3)$ ein negatives Resultat u. s. w. heraus. Stellt man die Ausdrücke $\varphi_{2m+1}(\alpha_1)$, $\varphi_{2m+1}(\alpha_2)$, . . $\varphi_{2m+1}(\alpha_k)$ in horizontaler Reihe auf, und unter jedem das demselben zugehörende Zeichen, so erhält man folgende Anordnung:

$$\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,,\ \varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,,\ \varphi_{2m+1}(\alpha_3)\,,\ \ldots\ \varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,.$$
$$-\qquad +\qquad -\qquad (-1)^k$$

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_1) - \varphi_{2m-1}(a) = \int_a^{\alpha_1} \varphi_{2m}(x)\,dx\,,$$

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_2) - \varphi_{2m-1}(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_{2m}(x)\,dx\,,$$

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_3) - \varphi_{2m-1}(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi_{2m}(x)\,dx\,,$$

. . . .

$$\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(\alpha_k) = \int_{\alpha_k}^{b} \varphi_{2m}(x)\,dx\,;$$

daher ergiebt sich auch folgende Anordnung:

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_1)-\varphi_{2m-1}(a)\,,\ \varphi_{2m-1}(\alpha_2)-\varphi_{2m-1}(\alpha_1)\,,\ \varphi_{2m-1}(\alpha_3)-\varphi_{2m-1}(\alpha_2)\,,\ .$$
$$+\qquad -\qquad +$$
$$\ldots\ldots\ \varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(\alpha_k)\,,$$
$$(-1)^k$$

wo jedes Größenpaar und das unter demselben stehende Zeichen auf gleiche Weise, wie vorhin zusammengehören.

Da man bei der unbeachtet gelassenen, entgegengesetzten Annahme der Zeichenzustände der Function $\varphi_{2m}(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ auf folgende Anordnung gelangt:

$$\varphi_{2m+1}(\alpha_1)\,,\ \varphi_{2m+1}(\alpha_2)\,,\ \varphi_{2m+1}(\alpha_3)\ \ldots\ \varphi_{2m+1}(\alpha_k)\,,$$
$$+\qquad -\qquad +\qquad (-1)^{k+1}$$

wie auch auf:

$$\varphi_{2m-1}(\alpha_1)-\varphi_{2m-1}(a)\,,\ \varphi_{2m-1}(\alpha_2)-\varphi_{2m-1}(\alpha_1)\,,\ \varphi_{2m-1}(\alpha_3)-\varphi_{2m-1}(\alpha_2)\,,\ ..$$
$$-\qquad +\qquad -$$
$$\ldots\ldots\ \varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(\alpha_k)\,,$$
$$(-1)^{k+1}$$

so sind wir zur Folgerung berechtiget, daß in den Brüchen der Gleichungen (ζ), unter beiden Annahmen, die Zeichen der Zähler denen der

zugehörenden Nenner, entgegengesetzt sind; und da vor jedem dieser Brüche, der Reihe nach, die negativen Factoren:

$$\frac{-v_0}{4m}, \quad \frac{-v_1}{4m}, \quad \frac{-v_2}{4m}, \ldots.$$

stehen, so fließt sofort die Richtigkeit des angekündigten Satzes.

241. Die für den vorliegenden Zweck dienlichen Folgerungen aus den zwei vorangehenden Nrn. wollen wir hier geordnet zusammenstellen.

I. Unmittelbar aus dem Satze der vorangehenden Nr. fließen die Ungleichheiten:

$$v_0 < u_0, \; v_1 < u_1, \; v_2 < u_2, \ldots v_k < u_k, \qquad (\eta)$$

aus denen wir ersehen, daß die durch angenäherte Werthe der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ erlangten Incrementenwerthe sämmtlich größer, als die respectiven unbekannten und genauen Werthe dieser Incremente.

II. Aus demselben Satze mit Zuziehung der Ungleichheiten (ε), wie die Gleichungen (ζ) Nr. 239 fließen auch folgende Ungleichheiten:

$$u_0 - v_0 < \frac{v_0}{2m}, \; u_1 - v_1 < \frac{v_1}{2m}, \; u_2 - v_2 < \frac{v_2}{2m}, \ldots.$$
$$\ldots. u_k - v_k < \frac{v_k}{2m},$$

und um so mehr, wenn die obigen Ungleichheiten (η) beachtet werden,

$$u_0 - v_0 < \frac{u_0}{2m}, \; u_1 - v_1 < \frac{u_1}{2m}, \; u_2 - v_2 < \frac{u_2}{2m}, \ldots.$$
$$\ldots.. u_k - v_k < \frac{u_k}{2m},$$

aus denen endlich die folgenden gezogen werden:

$$v_0 > u_0\left(1 - \frac{1}{2m}\right), \; v_1 > u_1\left(1 - \frac{1}{2m}\right), \; v_2 > u_2\left(1 - \frac{1}{2m}\right), \ldots$$
$$\ldots. v_k > u_k\left(1 - \frac{1}{2m}\right). \qquad (\vartheta)$$

Während die Ungleichheiten (η) die oberen Grenzwerthe angeben, zeigen die so eben aufgestellten Ungleichheiten die unteren Grenzwerthe der Incremente $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots v_k$ an. Aus den äußerst kleinen Unterschieden dieser obern und untern Grenzwerthe, die folgende Reihe darstellt:

$$\frac{u_0}{2m}, \quad \frac{u_1}{2m}, \quad \frac{u_2}{2m}, \ldots \frac{u_k}{2m},$$

entnimmt man zum besten den hohen Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Incrementenwerthe mit nur angenäherten Werthen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$.

III. Mit Zuziehung der Ungleichheiten in (ϑ) läßt sich jedesmal eine Zahl angeben, die größer als Null und numerisch kleiner als das kleinste der Incremente $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots v_k$ ist.

Wenn u_p die kleinste unter den Größen $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$ ist, so hat man, wenn die derselben unter den Incrementen $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots v_p$ entsprechende durch v_p angedeutet wird, nach II, die Ungleichheit:

$$v_p > u_p\left(1 - \frac{1}{2m}\right).$$

Ist nun v_p die kleinste der Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_k$, so stellt der Ausdruck zur Rechten dieses Ungleichheitzeichens den angekündigten Zahlenwerth vor. Dieser Zahlenwerth hat aber auch dann noch die eben erwähnte Eigenschaft, wenn gleich eine andere als v_p, z. B. v_q die kleinste der Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_p$ ist. Gesetzt also v_q sei die kleinste unter den so eben aufgeführten Größen, und u_q die derselben entsprechende unter den Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_k$, so wird man vermöge der Ungleichheiten (ϑ) folgende haben:

$$v_q > u_q\left(1 - \frac{1}{2m}\right);$$

vermöge der Voraussetzung ist $u_p < u_q$, daher hat man um so mehr:

$$v_q > u_p\left(1 - \frac{1}{2m}\right),$$

d. h. derselbe, vorhin erwähnte Ausdruck thut der Aufforderung, kleiner als das Minimum unter den Größen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_k$ zu sein, ein Genüge.

Stellt man sonach die Gleichung:

$$v = u_p\left(1 - \frac{1}{2m}\right) \qquad (\varkappa)$$

fest, wo u_p die kleinste unter den Zahlen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_p$ ist, so wird v kleiner als das Minimum unter den Incrementen $v_0, v_1, v_2, \ldots v_k$ sein.

242. Die in den letzten Nrn. gewonnenen Resultate stützen sich sämmtlich auf die in (ε) Nr. 239 aufgestellten Ungleichheiten. Heben wir eine derselben, z. B. die folgende:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{h_{p+1}^2 \varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) - h_p^2 \varphi_{2m+1}(\alpha_p)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} < \pm 1$$

heraus, so wollen wir hier Einiges zur leichteren Beurtheilung derselben mittheilen.

Nach Nr. 240 bieten die Ausdrücke:

$$\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) \text{ und } \varphi_{2m+1}(\alpha_p)$$

Resultate mit entgegengesetzten Zeichen dar; wird daher noch die Annahme:

$$h_p > h_{p+1}$$

gemacht, so wird die vorgelegte Ungleichheit um so mehr statthaben, wenn man die folgende:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m+1}(\alpha_p)}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} h_p^2 < \pm 1$$

zu realisiren sucht, d. h., wenn man den Werth des Ausdrucks links numerisch kleiner als die Einheit macht. Nach Nr. 240 wissen wir aber, daß dieser Ausdruck zur Linken einen negativen Werth hat, daher kann statt der letzten Ungleichheit die folgende gesetzt werden:

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi_{2m+1}(\alpha_p) - \varphi_{2m+1}(\alpha_{p+1})}{\varphi_{2m-1}(\alpha_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(\alpha_p)} h_p^2 < 1 .$$

Wird hier, nach Nr. 239,

$$\alpha_p = a_p \mp h_p, \quad \alpha_{p+1} = a_{p+1} \mp h_{p+1},$$

gesetzt, wo a_p und a_{p+1} angenäherte Werthe von α_p und α_{p+1}, und h_p und h_{p+1} die numerischen Werthe der denselben entsprechenden Fehler repräsentiren, so erhält man, bei Vernachlässigung der dritten und höhern Potenzen dieser Fehler, folgende Ungleichheit:

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi_{2m+1}(a_p) - \varphi_{2m+1}(a_{p+1})}{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)} h_p^2 < 1 ,$$

aus der

$$h_p^2 < 2 \cdot \frac{\varphi_{2m-1}(a_{p+1}) - \varphi_{2m-1}(a_p)}{\varphi_{2m+1}(a_p) - \varphi_{2m+1}(a_{p+1})}$$

gezogen wird.

Die Größen a_p und a_{p+1} sind immer als bekannt anzusehen; von den Werthen der Größen h_p und h_{p+1} sind nahe liegende Grenzen anzugeben möglich; findet sonach die letzte Ungleichheit Statt, so kann man zur Bestimmung der Größe u_p schreiten; im entgegengesetzten Falle muß man die Fehler h_p und h_{p+1} zu verringern, d. h., den Genauigkeitsgrad in der Bestimmung der Wurzeln α_p und α_{p+1} zu erhöhen suchen.

Ist man nun für alle Werthe von $p=1$ bis $p=k-1$ vom Stattbaben der zuletzt aufgestellten Ungleichheit überzeugt, so kann man zur Berechnung der Größen $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{k-1}$ übergeben; ferner hat man, bevor zur Bestimmung von u_0 geschritten wird, die Richtigkeit folgender Ungleichheit zu untersuchen:

$$h_1^2 < 2 \cdot \frac{\varphi_{2m-1}(a) - \varphi_{2m-1}(a_1)}{\varphi_{2m+1}(a_1)} ;$$

und, bevor die Bestimmung von u_k vorgenommen wird, muß folgende Ungleichheit:

$$h_k^2 < 2 \cdot \frac{\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(b)}{\varphi_{2m+1}(a_k)}$$

realisirt sich herausstellen.

243. Zur leichtern und schnellern Uebersicht der in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse lassen wir hier eine gedrängte Zusammenstellung derselben folgen.

Zuerst hat man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,dx = v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(a+2v)+\ldots+\varphi[a+(n-1)v]+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}\\ - Y_2[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)]v^2 + Y_4[\varphi_3(b) - \varphi_3(a)]v^4\\ - Y_6[\varphi_5(b)-\varphi_5(a)]v^6 + \ldots\ldots\ldots\\ \ldots + (-1)^m Y_{2m}[\varphi_{2m-1}(b)-\varphi_{2m-1}(a)]v^{2m}, \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

wo n eine ganze, positive Zahl und

$$n v = b - a \qquad \text{(B)}$$

ist. Um die Größe v, die wir beständig Increment nannten, dergestalt zu haben, daß der nach dieser Gleichung (A) bestimmte Werth des Integrals höchstens einen Fehler zulasse, der kleiner als eine gegebene Zahlengröße ε_m sei, muß die Gleichung:

$$\varphi_{2m}(x) = 0 , \qquad \text{(C)}$$

in Bezug auf jene reelle, innerhalb a und b fallende Wurzeln untersucht werden, die Veränderungen im Zeichenzustande der Function $\varphi_{2m}(x)$ hervorrufen.

Im Falle der Abwesenheit solcher Wurzeln bestimme man aus folgender Gleichung:

$$Y^2 \; [\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a)]^2 \, v^{4m} = \varepsilon_m^2 \, , \qquad (D)$$

den positiven und reellen Werth von v, und wenn dieser oder ein noch kleinerer, aber positiver Werth für v in (A) eingesetzt wird, alsdann stellt diese Gleichung den gesuchten Integralwerth mit der oben erwähnten Genauigkeit dar.

Wenn aber die Gleichung (C) dergleichen Wurzeln darbietet, alsdann stelle man die angenäherten Werthe derselben durch:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_k$$

vor, so daß man:

$$a^2 < a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < a_4^2 \ldots < a_k^2 < b^2$$

habe; ferner bezeichne man die Fehler dieser Wurzeln, in derselben Ordnung, durch:

$$h_1, \; h_2, \; h_3, \; h_4, \; \ldots \; h_k$$

so müssen diese Fehler folgenden Ungleichheiten genügen:

$$\left.\begin{aligned}
h_1^2 &< 2 \, . \, \frac{\varphi_{2m-1}(a) - \varphi_{2m-1}(a_1)}{\varphi_{2m+1}(a_1)} \, , \\
h_2^2 \text{ oder } h_1^2 &< 2 \, . \, \frac{\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)}{\varphi_{2m+1}(a_1) - \varphi_{2m+1}(a_2)} \, , \\
h_3^2 \text{ oder } h_2^2 &< 2 \, . \, \frac{\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a_2)}{\varphi_{2m+1}(a_2) - \varphi_{2m+1}(a_3)} \, , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
h_k^2 \text{ oder } h_{k-1}^2 &< 2 \, . \, \frac{\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})}{\varphi_{2m+1}(a_{k-1}) - \varphi_{2m-1}(a_k)} \, , \\
h_k^2 &< 2 \, . \, \frac{\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(b)}{\varphi_{2m+1}(a_k)} \, ,
\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

so, daß dort, wo zwei aufeinander folgende Fehler, links vom Ungleichheitszeichen vorkommen, jedesmal der größere zu nehmen ist.

Hat man sich vom Statthaben dieser Ungleichheiten überzeugt, so gehe man zur Bestimmung der Größen:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots\ u_k$$

mit Hülfe der folgenden Gleichungen über:

$$\left.\begin{array}{l}
Y_{2m}^2\ [\varphi_{2m-1}(a_1) - \varphi_{2m-1}(a)]^2\ u_0^{4m} = \varepsilon_m^2\ , \\
Y_{2m}^2\ [\varphi_{2m-1}(a_2) - \varphi_{2m-1}(a_1)]^2 u_1^{4m} = \varepsilon_m^2\ , \\
Y_{2m}^2\ [\varphi_{2m-1}(a_3) - \varphi_{2m-1}(a_2)]^2 u_2^{4m} = \varepsilon_m^2\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_{2m}^2\ [\varphi_{2m-1}(a_k) - \varphi_{2m-1}(a_{k-1})]^2\ u_{k-1}^{4m} = \varepsilon_m^2\ , \\
Y_{2m}^2\ [\varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a_k)]^2\ u_k^{4m} = \varepsilon_m^2\ ;
\end{array}\right\} \quad (F)$$

stellt u_r die kleinste dieser Größen vor, so ist, wenn:

$$v = u_r\left(1 - \frac{1}{2m}\right) \qquad (G)$$

angenommen wird, diese Größe v oder jede noch kleinere und positive Zahlengröße das in die Gleichung (A) einzusetzende Increment.

Die folgenden Nrn. bestimmen wir noch dazu, den zuletzt hier aufgeführten allgemeinen Fall auf zwei besondere Fälle anzuwenden.

244. Das bestimmte Integrale, das wir zunächst der Bestimmung unterziehen, ist folgendes:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\ ;$$

da wir zu diesem Zwecke die successiven Differenzialquotienten von e^{-x^2} herstellen müssen, so wollen wir, bevor zur Bestimmung dieses Integrals übergangen wird, den nten Differenzialquotienten der Function e^{ax^2}, wo a eine beliebige, von x independente Constante bedeutet, herstellen.

Stellt man durch $\varphi(x)$ diese Function und durch $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... $\varphi_n(x)$ den ersten, zweiten, dritten und nten Differenzialquotienten dieser Function vor, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi(x) = e^{ax^2}\ , \\
\varphi_1(x) = 2axe^{ax^2}\ , \\
\varphi_2(x) = [(2a)^2x^2 + 2a]\ e^{ax^2}\ , \\
\varphi_3(x) = [(2a)^3x^3 + 3(2a)^2x]\ e^{ax^2}\ ,
\end{array}\right\} \quad (a)$$

und um $\varphi_n(x)$ zu gewinnen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Stellt α irgend eine von x independente Größe vor, und setzt man:

$$f(x) = (1+\alpha x)\,\varphi(x)\;, \tag{b}$$

so gelangt man durch successive Differenziation der Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen auf folgende Gleichung:

$$f_n(x) = (1+\alpha x)\,\varphi_n(x) + n\alpha\,\varphi_{n-1}(x)\;,$$

wo $f_n(x)$ den nten Differenzialquotienten von f(x) nach x vorstellt.

Berücksichtiget man die zweite der Gleichungen (a), so kann man die Gleichung (b) auch folgendermaßen stellen:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha}{2a}\,\varphi_1(x)\;;$$

differenzirt man hier, links und rechts, n mal nach einander nach x, so ergiebt sich:

$$f_n(x) = \varphi_n(x) + \frac{\alpha}{2a}\,\varphi_{n+1}(x)\;,$$

welche Gleichung, mit der vorigen verglichen, auf folgende Recursion führt:

$$\frac{\alpha}{2a}\,\varphi_{n+1}(x) = \alpha x\,\varphi_n(x) + n\alpha\,\varphi_{n-1}(x)\;,$$

oder auch, nach Weglassung des gemeinschaftlichen und willkührlichen Factors α und nach Umsetzung von n in n + 1, auf folgende:

$$\varphi_{n+2}(x) = 2ax\varphi_{n+1}(x) + 2a(n+1)\varphi_n(x)\;. \tag{c}$$

Diese dreigliederige Recursionsgleichung, vereint mit den Gleichungen (a), werden uns den Ausdruck für $\varphi_n(x)$ darbieten.

Eine aufmerksame Betrachtung der Gleichungen (a) führt zur Folgerung, daß $\varphi_n(x)$, wie folgt, angenommen werden darf:

$$\varphi_n(x) = X^{(n)}\,e^{ax^2}$$

wo $X^{(n)}$ eine unbekannte Function von x vorstellt, die ganz, rational und vom nten Grade sein muß. Diese Function zu bestimmen, stelle man durch $X_1^{(n)}$ und $X_2^{(n)}$ den ersten und zweiten Differenzialquotienten von $X^{(n)}$ nach x vor, alsdann giebt die letzte Gleichung, durch zweimalige Differenziation nach x, folgende zwei Gleichungen:

$$\varphi_{n+1}(x) = 2axX^{(n)}e^{ax^2} + X_1^{(n)}e^{ax^2}\;,$$

$$\varphi_{n+2}(x) = [(2a)^2x^2+2a]\,X^{(n)}e^{ax^2} + 4axX_1^{(n)}e^{ax^2} + X_2^{(n)}e^{ax^2}\;;$$

substituirt man diese Ergebnisse in die obige Gleichung (c), so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors e^{ax^2}, folgende Gleichung:

$$X_2^{(n)} + 2axX_1^{(n)} - 2anX^{(n)} = 0 \ , \qquad (d)$$

die wir zur Bestimmung von $X^{(n)}$ benützen werden.

Wir haben schon bemerkt, daß $X^{(n)}$ eine vom nten Grade, rationale und ganze Function von x sei; bei noch näherer Betrachtung der Gleichungen (a) überzeugt man sich auch von der Richtigkeit folgender Annahme:

$$X^{(n)} = (2a)^n x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + a_6 x^{n-6} + \ldots \ , \qquad (e)$$

wo der Ausdruck zur Rechten, bei der Annahme n sei eine gerade Zahl, mit dem Gliede a_n und bei der Annahme n sei ungerade, mit dem Gliede $a_{n-1}x$ schließt.

Es erübriget uns sonach nur die Bestimmung der von x independenten Constanten:

$$a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ \ldots \ ,$$

zu deren Kenntniß wir mit Hülfe der vorigen Gleichung (d) geführt werden. In der That findet man, durch Differentiation der Gleichung (e),

$$X_1^{(n)} = (2a)^n n x^{n-1} + a_2(n-2)x^{n-3} + a_4(n-4)x^{n-5} + a_6(n-6)x^{n-7} + \ldots \ ,$$

$$X_2^{(n)} = (2a)^n n(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)(n-3)x^{n-4} + a_4(n-4)(n-5)x^{n-6} + \ldots \ ,$$

und da durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung (d) dieselbe identisch realisirt werden muß, so ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$2.2aa_2 = n(n-1)(2a)^n \ ,$$
$$2.4aa_4 = (n-2)(n-3)a_2 \ ,$$
$$2.6aa_6 = (n-4)(n-5)a_4 \ ,$$
$$2.8aa_8 = (n-6)(n-7)a_6 \ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2.2kaa_{2k} = (n-2k+2)(n-2k+1)a_{2k-2} \ ;$$

werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$(2a)^k.2.4.6.8\ldots 2ka_{2k} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-2k+1)(2a)^n \ ,$$

aus der

$$a_{2k} = \frac{(2a)^{n-k}}{2^k} \cdot (n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+1)\binom{n}{k}$$

gezogen wird.

Behält man die in Gleichung (e) angenommene Bezeichnung der Coefficienten von x für den Fall bei, wenn n gerade ist, und setzt mithin:

$$X^{(2n)} = (2a)^{2n} x^{2n} + a_2 x^{2n-2} + a_4 x^{2n-4} + \ldots + a_{2n-2} x^2 + a_{2n};$$

stellt ferner in dem Falle, wenn n ungerade ist, diese Coefficienten durch:

$$\alpha_2, \ \alpha_4, \ \alpha_6, \ \ldots . \ \alpha_{2n-2}$$

vor, d. h. setzt man:

$$X^{(2n-1)} = (2a)^{2n-1} x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-3} + \alpha_4 x^{2n-5} + \ldots + \alpha_{2n-2} x,$$

alsdann giebt die vorige Gleichung folgende zwei Gleichungen:

$$a_{2k} = a^k (2a)^{2n-2k} (2n-k)(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)\binom{2n}{k},$$

$$\alpha_{2k} = a^k (2a)^{2n-2k-1} (2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k)\binom{2n-1}{k},$$

oder auch, mit Beachtung der Gleichungen:

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}, \qquad \binom{2n-1}{k} = \binom{2n-1}{2n-k-1},$$

und nach Vollziehung einiger Reductionen, die folgenden:

$$a_{2k} = a^k (2a)^{2n-2k} (k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k\binom{2n}{2k},$$

$$\alpha_{2k} = a^k (2a)^{2n-2k-1} (k+1)(k+2)(k+3)\ldots 2k\binom{2n-1}{2k}.$$

Die erste dieser Gleichungen besteht für alle von $k=0$ bis $k=n$ und die zweite für die von $k=0$ bis $k=n-1$ enthaltenen ganzen Zahlen. Man hat also:

$$X^{(2n)} = (2ax)^{2n} + 2a\binom{2n}{2}(2ax)^{2n-2} + 3.4.a^2\binom{2n}{4}(2ax)^{2n-4}$$

$$+ 4.5.6\,a^3\binom{2n}{6}(2ax)^{2n-6} + 5.6.7.8\,a^4\binom{2n}{8}(2ax)^{2n-8} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n\,a^n\binom{2n}{2n},$$

$$X^{(2n-1)} = (2ax)^{2n-1} + 2a\binom{2n-1}{2}(2ax)^{2n-3} + 3.4a^2\binom{2n-1}{4}(2ax)^{2n-5}$$

$$+ 4.5.6a^3\binom{2n-1}{6}(2ax)^{2n-7} + 5.6.7.8a^4\binom{2n-1}{8}(2ax)^{2n-9} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)a^{n-1}\binom{2n-1}{2n-2}2ax\,,$$

daher hat man auch bei der Annahme:

$$\varphi(x) = e^{ax^2}\,,$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\varphi_{2n-1}(x) = \left\{\begin{matrix} (2ax)^{2n-1} + 2a\binom{2n-1}{2}(2ax)^{2n-3} \\ + 3.4a^2\binom{2n-1}{4}(2ax)^{2n-5} + 4.5.6a^3\binom{2n-1}{6}(2ax)^{2n-7} \\ \ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)a^{n-1}\binom{2n-1}{2n-2}2ax \end{matrix}\right\} e^{ax^2}, \quad (f)$$

$$\varphi_{2n}(x) = \left\{\begin{matrix} (2ax)^{2n} + 2a\binom{2n}{2}(2ax)^{2n-2} \\ + 3.4a^2\binom{2n}{4}(2ax)^{2n-4} + 4.5.6a^3\binom{2n}{6}(2ax)^{2n-6} + \ldots \\ \ldots + (n+1)(n+2)\ldots 2n\,a^n\binom{2n}{2n} \end{matrix}\right\} e^{ax^2}, \quad (g)$$

die für jeden ganzen und positiven Zahlenwerth von n und für jeden denkbaren, aber von x unabhängigen Werth von a bestehen.

245. Um nun das anfangs der vorigen Nr. vorgelegte bestimmte Integrale angenähert darzustellen, haben wir zuerst die beiden Gleichungen (f) und (g) derselben Nr. für die Annahme $a = -1$ umzuformen; diese Gleichungen geben unter der Voraussetzung:

$$\varphi(x) = e^{-x^2}\,,$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\varphi_{2n-1}(x) = -\left\{\begin{matrix} (2x)^{2n-1} - 2\binom{2n-1}{2}(2x)^{2n-3} \\ + 3.4\binom{2n-1}{4}(2x)^{2n-5} - 4.5.6\binom{2n-1}{6}(2x)^{2n-7} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1}n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)\binom{2n-1}{2n-2}2x \end{matrix}\right\} e^{-x^2},$$

$$\varphi_{2n}(x) = \left\{ \begin{array}{l} (2x)^{2n} - 2.\binom{2n}{2}(2x)^{2n-2} \\ + 3.4\binom{2n}{4}(2x)^{2n-4} - 4.5.6\binom{2n}{6}(2x)^{2n-6} + \ldots \\ \ldots\ldots + (-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n\binom{2n}{2n} \end{array} \right\} e^{-x^2}.$$

Legt man zur Bestimmung des fraglichen Integrals die Gleichung (A) Nr. 243 zum Grunde, und bricht man in dieser Gleichung die Rechnung mit dem Gliede ab, das dem Zeiger $m = 4$ entspricht, so erübriget noch, nach der Gleichung (C) derselben Nr., die reellen und positiven Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi_8(x) = 0$$

aufzusuchen, die, im vorliegenden Falle, in der folgenden Gleichung:

$$(2x)^8 - 2\binom{8}{2}(2x)^6 + 3.4\binom{8}{4}(2x)^4 - 4.5.6\binom{8}{6}(2x)^2 + 5.6.7.8\binom{8}{8} = 0$$

enthalten sind, oder auch nach Abkürzung dieser Gleichung mit 2^4 in der folgenden:

$$16x^8 - 224x^6 + 840x^4 - 840x^2 + 105 = 0 ;$$

setzt man hier $2x^2 = y$, so hat man:

$$y^4 - 28y^3 + 210y^2 - 420y + 105 = 0 .$$

Sämmtliche vier Wurzeln dieser Gleichung sind reell und positiv; dieselben liegen zwischen 0 und 1, zwischen 2 und 3, zwischen 7 und 8 und zwischen 17 und 18; von der ersten dieser vier Wurzeln überzeugt man sich sehr bald, daß dieselbe auch zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten sei; bedenkt man noch überdieß, daß man

$$2x^2 = y\,, \text{ also } x = \sqrt{\tfrac{y}{2}}$$

hat, so liegen die positiven Wurzeln der Gleichung vom 8ten Grade in x zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, zwischen 1 und 1,224, zwischen 1,870 und 2 und zwischen 2,915 und 3. Setzen wir dem gemäß:

$$a_1 = \tfrac{3}{10}\,,\; a_2 = 1\,,\; a_3 = 2 \text{ und } a_4 = 3\,,$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 angenäherte Werthe der positiven Wurzeln der Gleichung vom 8ten Grade in x sind, so hat man:

$$h_1 < \frac{3}{10}\,,\; h_2 < \frac{324}{1000}\,,\; h_3 < \frac{130}{1000} \text{ und } h_4 < \frac{85}{1000}\,,$$

wo h_1, h_2, h_3, h_4 die Fehler dieser angenäherten Wurzelwerthe vorstellen.

Diese Werthe von a_1, a_2, a_3 und a_4 in die Ungleichheiten (E) Nr. 243 eingesetzt, hat man, wenn aus der ersten der zwei obigen Gleichungen die Werthe für $\varphi_7(x)$ und $\varphi_9(x)$ abgeleitet werden, die Richtigkeit folgender Ungleichheiten zu untersuchen:

$$h_1^2 < \frac{86,774568}{730,23829776},$$

$$h_2^2 \text{ oder } h_1^2 < \frac{\frac{29}{e} + \frac{3}{10}\cdot\frac{86,774568}{e^{0,09}}}{\frac{335}{e} + \frac{3}{10}\cdot\frac{730,23829776}{e^{0,09}}},$$

$$h_3^2 \text{ oder } h_2^2 < \frac{2\cdot\frac{97}{e^4} + \frac{29}{e}}{2\cdot\frac{721}{e^4} + \frac{335}{e}},$$

$$h_4^2 < \frac{813}{4239},$$

d. h. man muß

$$h_1^2 < 0,118\ ,\ h_2^2 \text{ oder } h_1^2 < 0,106\ ,$$

$$h_3^2 \text{ oder } h_2^2 < 0,095 \text{ und } h_4^2 < 0,191\ ,$$

oder

$$h_1 < 0,34,\ h_2 \text{ oder } h_1 < 0,32,\ h_3 \text{ oder } h_2 < 0,30,\ h_4 < 0,43$$

haben; diese Ungleichheiten finden aber nach den oben festgestellten obern Grenzwerthen dieser Größen Statt, daher kann auch, nach den oben für a_1, a_2, a_3, a_4 angenommenen Werthen, zur Bestimmung der Größen u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, mittelst der Gleichungen (F) Nr. 243 geschritten werden. Setzt man in diese eben citirten Gleichungen:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{10^7},$$

und berücksichtiget man den Werth von Y_2 aus Nr. 232, so geben dieselben, da man $m = 4$ und:

$$\varphi_7(a_1) = 380,669,\ \varphi_7(a_2) = -170,696\ ,$$

$$\varphi_7(a_3) = 56,852,\ \varphi_7(a_4) = -4,819\ ,$$

wie endlich

$$\varphi_7(a) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_7(b) = 0$$

hat, folgende Werthbestimmungen:

$u_0 = 0{,}365$, $u_1 = 0{,}349$, $u_2 = 0{,}390$, $u_3 = 0{,}459$, $u_4 = 0{,}631$;
und da u_1 den kleinsten Werth hat, so setze man, nach (G) Nr. 24,

$$v = u_1(1 - \tfrac{1}{8}) = 0{,}305 \ .$$

Nehmen wir zur Vereinfachung der Rechnung $v = \frac{3}{10}$ an, so geht die Gleichung (A) derselben Nr., da sämmtliche Glieder der Correctionsreihe derselben verschwinden, in folgende über:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = v\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-v^2} + e^{-(2v)^2} + e^{-(3v)^2} + e^{-(4v)^2} + \ldots\right\},$$

wo, bei der Annahme $v = \frac{3}{10}$, die innerhalb der Klammern enthaltene Reihe von Gliedern so lange fortzusetzen ist, bis man auf ein Glied gelangt, das kleiner als ε_m oder als $\frac{1}{10^7}$ ist.

Mit Zugrundelegung einer siebenstelligen Logarithmentafel findet man, wegen:

$$\text{Log.}e = 0{,}4342944\,8$$

folgende Resultate:

$\frac{1}{2} = 0{,}5000000$,	$e^{-(7v)^2} = 0{,}0121552$,
$e^{-v^2} = 0{,}9139310$,	$e^{-(8v)^2} = 0{,}0031511$,
$e^{-(2v)^2} = 0{,}6976763$,	$e^{-(9v)^2} = 0{,}0006823$,
$e^{-(3v)^2} = 0{,}4448581$,	$e^{-(10v)^2} = 0{,}0001234$,
$e^{-(4v)^2} = 0{,}2369277$,	$e^{-(11v)^2} = 0{,}0000186$,
$e^{-(5v)^2} = 0{,}1053992$,	$e^{-(12v)^2} = 0{,}0000024$,
$e^{-(6v)^2} = 0{,}0391639$,	$e^{-(13v)^2} = 0{,}0000002$;

summirt man die Zahlen zur Rechten der Gleichheitszeichen, so findet man:

$$2{,}9540894 \ ,$$

welche mit $v = \frac{3}{10}$ multiplicirt, folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 0{,}8862268$$

darbietet; setzt man in Gleichung (62) Nr. 160, $a = 1$, so findet man:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}8862269$$

welches Resultat mit dem vorigen bis auf die siebente Decimalstelle übereinstimmt; der sich ergebende Unterschied $\frac{1}{10^7}$ rührt lediglich von

der Unsicherheit her, mit der die siebente Decimale aus einer siebenstelligen Logarithmentafel entnommen werden kann.

246. Auch das bestimmte Integrale:

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,dx\,,$$

wollen wir nach der hier mitgetheilten Annäherungsmethode zu bestimmen suchen.

Man hat hier:

$$\varphi(x) = e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

$$x^2\,\varphi_1(x) = (1-x^2)\,\varphi(x)$$

$$x^4\,\varphi_2(x) = (1-2x-2x^2+x^4)\,\varphi(x)\,,$$

$$x^6\,\varphi_3(x) = (1-6x+3x^2+6x^3+3x^4-x^6)\,\varphi(x)\,,$$

$$x^8\,\varphi_4(x) = (1-12x+32x^2-18x^4-12x^5-4x^6+x^8)\,\varphi(x)\,,$$

$$x^{10}\,\varphi_5(x) = (1-20x+115x^2-180x^3-50x^4+60x^5+50x^6+20x^7+5x^8-x^{10})\,\varphi(x),$$

$$x^{12}\,\varphi_6(x) = \left\{\begin{matrix}1-30x+294x^2-1080x^3+1095x^4+540x^5-200x^6\\ -240x^7-105x^8-30x^9-6x^{10}+x^{12}\end{matrix}\right\}\varphi(x)\,,$$

$$x^{14}\,\varphi_7(x) = \left\{\begin{matrix}1-42x+623x^2-3990x^3+10521x^4-7140x^5-5075x^6\\ +420x^7+1295x^8+630x^9+189x^{10}+42x^{11}+7x^{12}-x^{14}\end{matrix}\right\}\varphi(x)\,,$$

und zur Herstellung der folgenden und höheren Differenzialquotienten hat man die Recursionsgleichung:

$$x^2\varphi_n(x) + [x^2+2(n-1)x-1]\,\varphi_{n-1}(x) + (n-1)(2x+n-2)\,\varphi_{n-2}(x) + (n-1)(n-2)\,\varphi_{n-3}(x) = 0,$$

die für alle ganzen und positiven Werthe von n besteht. Von dieser viergliederigen Recursionsgleichung machen wir gegenwärtig keinen Gebrauch, indem wir die Gleichung (A) Nr. 243, auf das vorliegende Integrale angewandt, mit dem Gliede, das der Annahme $m=3$ entspricht, schließen wollen.

Nach dieser festgestellten Annahme haben wir die zwischen 0 und 1 enthaltenen Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi_6(x) = 0$$

aufzusuchen; berücksichtiget man also den obigen Werth von $\varphi_6(x)$, so haben wir die Gleichung:

$$x^{12}-6x^{10}-30x^9-105x^8-240x^7-200x^6+540x^5+1095x^4$$
$$-1080x^3+294x^2-30x+1=0$$

in Beziehung auf die zwischen 0 und 1 enthaltenen Wurzeln zu untersuchen, oder wenn man $x=\frac{1}{y}$ setzt, so haben wir die zwischen 1 und $+\infty$ enthaltenen Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$y^{12}-30y^{11}+294y^{10}-1080y^9+1095y^8+540y^7-200y^6-240y^5$$
$$-105y^4-30y^3-6y^2+1=0$$

aufzusuchen.

Nach dem von Fourier in seiner Analyse des équations déterminées aufgestellten Theoreme (A) überzeugt man sich, daß diese letzte Gleichung nur 4 solcher Wurzeln besitzen kann; dieselben sind zwischen 2 und 3, zwischen 4 und 5, zwischen 8 und 9 und zwischen 14 und 15 enthalten: sonach liegen die denselben entsprechenden Wurzeln der vorigen Gleichung in x zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$, zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ und zwischen $\frac{1}{14}$ und $\frac{1}{15}$, oder wenn dieselben aufsteigend geordnet vorgeführt werden, dann sind dieselben zwischen $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{14}$, zwischen $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{8}$, zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$ und zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ enthalten. Bezeichnet man die angenäherten Werthe dieser Wurzeln, in gleicher Ordnung durch a_1, a_2, a_3, und a_4, und setzt:

$$a_1=\frac{6}{100},\quad a_2=\frac{1}{10},\quad a_3=\frac{2}{10},\quad a_4=\frac{4}{10},$$

so hat man für die denselben entsprechenden Fehler folgende Ungleichheiten:

$$h_1<\frac{1}{100},\quad h_2<\frac{14}{1000},\quad h_3<\frac{5}{100},\quad h_4<\frac{1}{10}.$$

Werden diese Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 in die Ungleichheiten (E) Nr. 243 eingesetzt, so muß man haben:

$$h_1^2<0{,}000533\ ,$$
$$h_2^2 \text{ oder } h_1^2<0{,}000484\ ,$$
$$h_3^2 \text{ oder } h_2^2<0{,}000560\ ,$$
$$h_4^2<0{,}002024\ ;$$

die erste und zweite dieser Ungleichheiten finden in der That Statt, die dritte und vierte dieser Ungleichheiten hingegen kommen den obigen für h_3 und h_4 aufgestellten obern Grenzwerthe nicht nach; allein untersucht man etwas genauer die Wurzeln, deren angenäherte Werthe a_3 und a_4 sind, so überzeugt man sich auch vom Statthaben der die

Größen b_3 und b_4 betreffenden Ungleichheiten, und wir können sonach, mit Zugrundelegung der obigen Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4 zur Bestimmung der Größen u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 nach den Gleichungen (F) Nr. 243 übergehen.

Man findet zuerst, wenn von den Decimalen abgesehen wird:

$$\varphi_5(a_1) = 15705\ , \qquad \varphi_5(a_2) = -\ 14110\ ,$$

$$\varphi_5(a_3) = 5531\ , \qquad \varphi_5(a_4) = -\ 285\ ,$$

und völlig genau:

$$\varphi_5(0) = 0\ , \qquad \varphi_5(1) = 0\ ;$$

setzt man daher, wie im speciellen Falle der vorangehenden Nr. $\varepsilon_m = \frac{1}{10^7}$ und beachtet man die so eben aufgestellten Gleichungen, so überzeugt man sich, auch ohne die numerische Ermittelung der Größen u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 vorgenommen zu haben, daß die Größe u_1 den kleinsten Werth haben muß; und da es lediglich nur um diese Größe zu thun ist, so lassen wir die übrigen unbeachtet, und wenden uns der zweiten der oben citirten Gleichungen (F) zu, um den Werth dieser kleinsten Größe u_1 zu erfahren.

Nach dieser Gleichung findet man:

$$u_1 = 0{,}06829\ ,$$

daher hat man, nach der Gleichung (G) Nr. 243,

$$v = u_1\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0{,}05691\ ;$$

erklären wir uns zur Vereinfachung der Rechnung für die Annahme:

$$v = 0{,}05 = \frac{1}{20}\ ,$$

so hat man, da das vorliegende bestimmte Integrale von $x = 0$ bis $x = 1$ sich erstreckt, nach Gleichung (B) Nr. 243,

$$n\,.\frac{1}{20} = 1 - 0\ , \quad \text{oder} \quad n = 20\ .$$

Es geht sonach die Gleichung (A) derselben Nr., auf den vorliegenden Fall angewandt, in folgende über:

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx =$$

$$= v\left\{e^{-\left(v+\frac{1}{v}\right)} + e^{-\left(2v+\frac{1}{2v}\right)} + \ldots + e^{-\left(19v+\frac{1}{19v}\right)} + \frac{1}{2}e^{-2}\right\}$$

$$- Y_2\varphi_1(1)v^2 + Y_4\varphi_3(1)v^4 - Y_6\varphi_5(1)v^6 ;$$

die erste Zeile rechts vom Gleichheitszeichen bietet, für $v = \frac{1}{20}$, fol- gendes Resultat dar:

$$0{,}072198245 ;$$

ferner geben die anfangs dieser Nr. aufgestellten Werthe für φx $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ . . . die Gleichungen:

$$\varphi_1(1) = 0 , \quad \varphi_3(1) = 6e^{-2} , \quad \varphi_5(1) = 0 ;$$

bestimmt man daher das Glied:

$$Y_4\varphi_3(1)v^4 = 6e^{-2}Y_4v^4 ,$$

unter der Annahme $v = \frac{1}{20}$, so erhält man für dessen Werth:

$$0{,}000000007048 ,$$

sonach übt die Correctionsreihe im vorliegenden Falle ihren Einfluß erst in der neunten Decimalstelle aus, und man hat:

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = 0{,}07219825 ,$$

und wenn die siebente Decimalstelle mit Zuziehung der achten corrigirt wird, hat man endlich:

$$\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx = 0{,}0721983 , \qquad (54)$$

in der noch die siebente Decimalstelle richtig sein muß.

Von dem so eben ermittelten Integralausdrucke ist auch der folgende:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$$

abhängig. Man hat nämlich

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = \int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + \int_1^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx\,;$$

umsetzt man nun im zweiten der Integralien zur Rechten x in $\frac{1}{x}$, so hat man auch:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = \int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + \int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x^2}\,;$$

ferner hat man durch einfache Differenziation die Gleichung:

$$d.\,e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} = -\,e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x^2}\,,$$

integrirt man hier links und rechts von $x=0$ bis $x=1$, so erhält man:

$$e^{-2} = -\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx + \int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}\frac{dx}{x^2}\,,$$

welche Gleichung, mit der vorangehenden durch Subtraktion verbunden, auf:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx = \frac{1}{e^2} + 2\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx \qquad (55)$$

führt, die die obige Behauptung rechtfertiget.

Ende des ersten Theiles der Differenzial- und Integralrechnung.

Verzeichniß der Druck- und Schreibfehler.

Seite	Zeile	von	statt:	soll stehen:
xvi	4	von unten	en	in
17	8	„	$\varphi(x)=\frac{F(x)}{F(x)}$	$\varphi(x)=\frac{f(x)}{F(x)}$
22	3	oben	$f(k+n\omega)=$	$f(x+n\omega)=$
22	10	„	$\binom{n}{n-k-1}f_{k+1}(x)$	$\binom{n}{n-k-1}\omega f_{k+1}(x)$
30	9	unten	$\frac{h^k(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}f_k(\beta x)$	$\frac{x^k(1-\beta)^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}f_k(\beta x)$
57	9	oben	$\frac{1}{\gamma}\log.(\sqrt{a}\pm x\sqrt{\gamma})$	$\frac{1}{\gamma}\log.(\sqrt{\alpha}\pm x\sqrt{\gamma})$
60	6	unten	die Größe λ u. μ	die Größen λ u. μ
75	1	„	durch ω und $\frac{1}{\omega}$	durch w und $\frac{1}{w}$
86	11	oben	$\int\frac{xdx}{(1+2x\mathrm{Cos}.\Theta+x^2\sqrt{1+x^2}}$	$\int\frac{xdx}{(1+2x\mathrm{Cos}.\Theta+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
107	6	unten	$2\left(\mathrm{Cos}.\frac{x}{2}\right)^9$	$2\left(\mathrm{Cos}.\frac{x}{2}\right)^2$
110	5	„	$\sum_{k\ 1}^{k=p-1}\frac{(m+1)2k\pi}{2p}$	$\sum_{k=1}^{k=p-1}\mathrm{Cos}.\frac{(m+1)2k\pi}{2p}$
113	8	„	$\mathrm{Cos}.\frac{p-q}{2p}2k\frac{\pi}{2}$	$\mathrm{Cos}.\frac{p-q}{p}2k\frac{\pi}{2}$
115	11	„	$\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)$	$\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{Sin}.\left(\frac{3\pi}{4p}-\frac{x}{2}\right)$
117	12	oben	p Sin.x in pz	p Sin.x in z

Seite	160	Zeile	13	von	unten	statt:	(β) und (β')	soll stehen:	(β) und (β^1)
„	160	„	16	„	„	„	(β) und (β')	„	(β) und (β^1)
„	162	„	6	„	„	„	Nr. 34	„	Nr. 33
„	170	„	3	„	„	„	$\int_a^{a+k_1}(x)dx$	„	$\int_a^{a+k_1}\varphi(x)dx$
„	173	„	14	„	oben	„	Progeſſion	„	Progreſſion
„	173	„	19	„	„	„	$h\varphi(a+2h +$	„	$h\varphi(a+2h) +$
„	203	„	11	„	„	„	$\varphi(x)$	„	$\varphi(x)dx$
„	213	„	1	„	unten	„	$\int$	„	$\int_0^\infty$
„	214	„	14	„	oben	„	$\int$	„	$\int_0^\infty$
„	220	„	1	„	unten	„	$\frac{M}{2p}$	„	$\frac{M\pi}{2p}$
„	221	„	1	„	oben	„	$\frac{N}{2p}$	„	$\frac{N\pi}{2p}$
„	221	„	2	„	„	„	$\frac{M}{2p}$	„	$\frac{M\pi}{2p}$
„	223	„	6	„	„	„	(14) und (16)	„	(14) und (15)
„	223	„	7	„	„	„	(15) und (17)	„	(16) und (17)
„	226	„	5	„	unten	„	$\alpha < \beta$	„	$\alpha > \beta$
„	237	„	11	„	oben	„	$\int^\infty$	„	$\int_0^\infty$
„	270	„	4	„	„	„	$= \omega$	„	$= 2\omega$
„	270	„	7	„	„	„	$\varphi(y)\omega$	„	$\varphi(y)2\omega$
„	270	„	9	„	„	„	ω	„	2ω
„	287	„	7	„	„	„	$= \frac{1}{m+1}$	„	$= \frac{2}{m+1}$
„	287	„	11	„	„	„	$\int_0^\beta$	„	$\frac{1}{2}\int_0^\beta$
„	287	„	12	„	„	„	$\int_0^\beta$	„	$\frac{1}{2}\int_0^\beta$
„	291	„	4	„	unten	„	$\int_{\frac{2r-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi+\varepsilon}$	„	$\int_{\frac{2r-1}{2}\pi+\varepsilon}^{\frac{2r+1}{2}\pi-\varepsilon}$

Seite	304	Zeile	1	von	unten	statt:	$(-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)$	soll stehen:	$(-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$
"	322	"	3	"	"	"	$\int_0^{\pi 2}$	"	$\int_0^{2\pi}$
"	328	"	11	"	oben	"	Innhalt	"	Inhalt
"	362	"	5	"	"	"	$\log.\frac{\frac{k}{2}}{\text{Sin}.\frac{k\omega}{2}}$	"	$\log.\frac{\frac{k\varepsilon}{2}}{\text{Sin}.\frac{k\omega}{2}}$
"	382	"	11	"	"	"	(c_1)	"	(c'_1)
"	400	"	1	"	unten	"	$e^{-((1+x)y}$	"	$e^{-(1+x)y}$
"	401	"	13	"	"	"	vorhergehenden	"	vorhergehender
"	402	"	17	"	"	"	$(a+1\ a+2)$	"	$(a+1)(a+2)$
"	448	"	16	"	oben	"	Functionen haben	"	Function habe
"	451	"	3	"	unten	"	$u_0, u_1, u_2, \ldots u_p$	"	$u_0, u_1, u_2, \ldots u_k$
"	464	"	3	"	"	"	Grenzwerthe	"	Grenzwerthen

